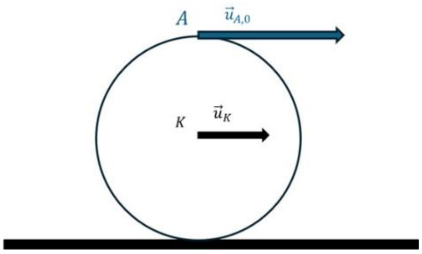
ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Οι απαντήσεις σε *όλα* τα ερωτήματα θα πρέπει να αναγραφούν στο ***Φύλλο Απαντήσεων*** που ακολουθεί μετά το τέλος των εκφωνήσεων.
2. Η επεξεργασία των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε φύλλα Α4 ή σε τετράδιο που θα σας δοθεί. Τα υλικά αυτά θα παραδοθούν στο τέλος της εξέτασης μαζί με το ***Φύλλο Απαντήσεων***

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1ο ΘΕΜΑ

Τροχός ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Έστω σημείο Α της περιφέρειάς του, το οποίο την στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στο ανώτατο σημείο της τροχιάς του (βλ. σχ.).



Α.1. Να υπολογίσετε το μέτρο της μετατόπισης $|\Delta\vec{s}_A|$ του σημείου Α για τυχούσα χρονική στιγμή $t > 0$.

Α.2. Να σχεδιάσετε ποιοτικά την τροχιά $y = f(x)$ που διαγράφει το σημείο Α (δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσετε τον τύπο της συνάρτησης). Στο διάγραμμα θα πρέπει να φαίνονται οι συντεταγμένες των ακρότατων σημείων της τροχιάς.

Α.3. Να βρείτε τη συνάρτηση του μέτρου της ταχύτητας u_A του σημείου Α ως προς τον χρόνο.

2ο ΘΕΜΑ

Μια οριζόντια πλατφόρμα *μεγάλου μήκους* εξαναγκάζεται σε κίνηση από έναν μηχανισμό, έτσι ώστε η ταχύτητά της ως προς το Σύστημα Αναφοράς του Εργαστηρίου να περιγράφεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \frac{20\sqrt{3}}{9}\sigma\upsilon\nu\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \ \ (S.I.)$$

Πάνω στην πλατφόρμα τοποθετείται ένας μικρός κύβος, ο οποίος αρχικά ηρεμεί ως προς αυτήν. Λόγω της ειδικής κατεργασίας των επιφανειών επαφής, εμφανίζεται **ανισοτροπία** στον συντελεστή τριβής. Συγκεκριμένα:

• για τάση ολίσθησης του κύβου ως προς την πλατφόρμα προς την αρνητική κατεύθυνση, ο συντελεστής στατικής τριβής είναι $\mu_{s(1)} = 2$.

• Για τάση ολίσθησης προς τη θετική κατεύθυνση, ο συντελεστής στατικής τριβής είναι $\mu_{s(2)} = 0{,}6$

• Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης και προς τις δύο κατευθύνσεις έχει την τιμή $\mu_{k(2)} = 0{,}25$

Το σύστημα τίθεται σε ταλάντωση την χρονική στιγμή $t = 0$.

Β.1. Να βρείτε τις εξισώσεις επιτάχυνσης $\alpha = f(t)$ και απομάκρυνσης $x = f(t)$ της ταλάντωσης συναρτήσει του χρόνου και να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητά της ω, την περίοδο T και το πλάτος A. Από ποια θέση ξεκινά η ταλάντωση;

Β.2. Να αποδείξετε ότι η ολίσθηση του κύβου ξεκινά την στιγμή $t_1 = \frac{T}{3}$.

Β.3. Στο Σύστημα Αναφοράς του Εργαστηρίου να υπολογίσετε την ταχύτητα υ_1 και την συνολική απόσταση s_1 που έχει διανύσει ο κύβος την στιγμή t_1.

Β.4. Να αποδείξετε ότι η μέση ταχύτητα $\bar{\upsilon}$ του κύβου (στο Σύστημα Αναφοράς του Εργαστηρίου) κατά την διάρκεια της πρώτης και κάθε επόμενης περιόδου της ταλάντωσης της πλατφόρμας, δηλαδή σε κάθε χρονικό διάστημα της μορφής $(\nu \cdot T\ ,\ \ (\nu+1)\cdot T)$, όπου ν μη αρνητικός ακέραιος, είναι σταθερή και να την υπολογίσετε με ένα σημαντικό ψηφίο. Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\frac{m}{s^2}$, $\frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1{,}8$.

3ο ΘΕΜΑ

Στο πλαίσιο της προετοιμασίας για την Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής, μία ομάδα μαθητών/-τριων μελετά την κίνηση υλικού σημείου μάζας m και θετικού φορτίου q, όταν αυτό αφήνεται ελεύθερο σε χώρο που συνυπάρχουν:

- ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$,
- ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E}$, με $\vec{E} \perp \vec{B}$,
- ομογενές βαρυτικό πεδίο έντασης $\vec{g}$, με $\vec{g} \upharpoonleft\!\downharpoonright \vec{E}$.

Θεωρούν ότι το υλικό σημείο δέχεται δυνάμεις αποκλειστικά από αυτά τα τρία πεδία.

Γ.1. Σε ένα απλό σχήμα σχεδιάζουν τις εντάσεις των πεδίων και συμπεριλαμβάνουν τις δυνάμεις που δέχεται το υλικό σημείο την χρονική στιγμή $t_o = 0$. Να αναπαράγετε το σχήμα αυτό στο τετράδιό σας.

Γ.2. Αρχικά, μελετούν την περίπτωση όπου $|q\vec{E}| = |m\vec{g}|$. Πώς περιγράφουν την κινηματική συμπεριφορά του υλικού σημείου;

Γ.3. Τα παιδιά σκοπεύουν να χρησιμοποιήσουν μια πειραματική διάταξη για να ελέγξουν τα θεωρητικά ευρήματά τους. Ωστόσο, δεν αναμένουν απόλυτη ταύτιση των μετρήσεών τους με τις θεωρητικά αναμενόμενες τιμές. Να αναφέρετε όσες περισσότερες αιτίες μπορείτε για τις αποκλίσεις αυτές.

Γ.4. Στην συνέχεια, υποθέτουν ότι ισχύει $|q\vec{E}| > |m\vec{g}|$.

Γ.4.1. Ποιο Σύστημα Αναφοράς θα πρέπει να επιλέξουν ώστε να απλοποιήσουν τις εξισώσεις κίνησης του υλικού σημείου;

Γ.4.2. Ποια είναι η αρχική τους εκτίμηση για το σχήμα της τροχιάς του υλικού σημείου;

Γ.4.3. Σε ένα απλό σχήμα σχεδιάζουν το υλικό σημείο και τις δυνάμεις που δέχεται για μία χρονική στιγμή $t > t_o$ Να αναπαράγετε το σχήμα αυτό στο τετράδιό σας.

Γ.4.4. Κατόπιν, λαμβάνοντας υπ΄ όψη όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο υλικό σημείο (κατά τον οριζόντιο άξονα), αποδεικνύουν ότι σε μια τυχαία θέση της κίνησής του η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του δίνεται από τη σχέση $\upsilon_x = \frac{qB}{m}y$. Να ανασυνθέσετε την απόδειξή τους στο τετράδιό σας.

Γ.4.5. Στην συνέχεια, προκειμένου να βρουν την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας, μελετούν την κίνηση ενεργειακά και αποδεικνύουν την σχέση $\upsilon_y^2 = \frac{2y(qE-mg)}{m} - \frac{q^2B^2}{m^2}y^2$. Ποια βήματα περιλαμβάνει ο συλλογισμός τους;

Γ.4.6. Ποια είναι η μέγιστη τεταγμένη y_{max} στην οποία μπορεί να βρεθεί το υλικό σημείο κατά την κίνησή του και ποια η μέγιστη τιμή υ_{max} της ταχύτητάς του;

Γ.4.7. Προχωρούν, αποδεικνύοντας ότι η κατακόρυφη συνιστώσα της κίνησης είναι Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $D = \frac{q^2B^2}{m}$, πλάτος $A = \frac{m(qE-mg)}{q^2B^2}$ και αρχική φάση $\varphi_o = \frac{3\pi}{2}$. Στο τετράδιό σας να προσπαθήσετε να ανασυνθέσετε την απόδειξή τους, συμπεριλαμβάνοντας την έκφραση y=f(t) στην οποία κατέληξαν.

Γ.4.8. Συνδυάζουν όλα τα αποτελέσματα και βρίσκουν εκφράσεις των μέτρων των ταχυτήτων υ και υ_x συναρτήσει του χρόνου. Στο τετράδιό σας να γράψετε τις εκφράσεις αυτές και την διαδικασία που αποδεικνύει την ορθότητά τους.

Υπενθυμίζεται η τριγωνομετρική ταυτότητα $\sigma\upsilon\nu 2\theta = 1 - 2\eta\mu^2\theta$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΡΟΥΣΕΙΣ-ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$
$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$$
$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2$$

$$v_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$$
$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1$$
$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$
$$T_{\text{ολ}} = \mu N$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$
$$p = mv$$
$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a_\kappa = \frac{v^2}{r}$$
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$T = \frac{1}{f}$$
$$v_{\text{cm}} = \omega R$$
$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_{\text{cm}} = a_{\gamma\omega\nu}R$$
$$\tau = F\ell = Fd$$
$$L = mvr$$
$$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL}{dt}$$

a : Επιτάχυνση	K : Κινητική ενέργεια	s : Τόξο ή Διάστημα	$\alpha_{\gamma\omega\nu}$: Γωνιακή επιτάχυνση
E : Ενέργεια	L : Στροφορμή	T : Περίοδος	μ : Συντελεστής τριβής
f : Συχνότητα	ℓ, d : Μήκος ή Απόσταση	V : Όγκος	θ : Γωνία
F : Δύναμη	m : Μάζα	v : Ταχύτητα	ρ : Πυκνότητα
$T_{\text{ολ}}$: Τριβή ολίσθησης	p : Ορμή	W : Έργο	τ : Ροπή
N : Κάθετη δύναμη	R, r : Ακτίνα	x, y : Θέση	ω : Γωνιακή ταχύτητα
		Δx : Μετατόπιση	

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

$$x = A\,\eta\mu(\omega t + \phi)$$
$$v = \omega A\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi)$$
$$a = -\omega^2 A\,\eta\mu(\omega t + \phi)$$
$$a = -\omega^2 x$$
$$F = -Dx$$
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$D = m\omega^2$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$
$$U = \frac{1}{2}Dx^2$$
$$F = -bv$$
$$A = A_0 e^{-\Lambda t}$$

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \ldots = \sigma\tau\alpha\theta.$$
$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$v = \lambda f$$
$$y = A\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$r_1 - r_2 = N\lambda,\ N \in \mathbb{Z}$$
$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2},\ N \in \mathbb{Z}$$
$$y = 2A\,\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\,\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$$
$$x_{\text{K}} = 0, \frac{\lambda}{2}, \ldots, N\frac{\lambda}{2}$$
$$x_\Delta = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \ldots, (2N+1)\frac{\lambda}{4}$$

A : Πλάτος	ω : Γωνιακή συχνότητα	K ή k : Σταθερά ελατηρίου	λ : Μήκος κύματος
x : Θέση	ϕ : Αρχική φάση	D : Σταθερά επαναφοράς	U : Δυναμική ενέργεια
v : Ταχύτητα	f : Συχνότητα	T : Περίοδος	y : Απομάκρυνση
a : Επιτάχυνση	f_0 : Ιδιοσυχνότητα	b : Σταθερά απόσβεσης	

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ - ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ - ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΑ

$$E = \frac{F}{q}$$
$$I = \frac{dq}{dt}$$
$$I = \frac{V}{R}$$
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{ολ}}}$$
$$V = \frac{W}{q}$$
$$R_{\text{ολ}} = R_1 + R_2 + R_3$$
$$\frac{1}{R_{\text{ολ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$
$$R = \rho\frac{\ell}{A}$$
$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\ell}{r^2}\,\eta\mu\,\theta$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}$$
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi I}{r}$$
$$\sum B\Delta\ell\,\sigma\upsilon\nu\,\theta = \mu_0 I_{\varepsilon\gamma\kappa}$$
$$B = \mu_0 I n$$
$$n = \frac{N}{\ell}$$
$$\Phi_B = BA\,\sigma\upsilon\nu\,\theta$$
$$F = B|q|v\,\eta\mu\,\phi$$
$$R = \frac{mv}{|q|B}$$
$$T = \frac{2\pi m}{|q|B}$$
$$v = \frac{E}{B}$$

$$F = BI\ell\,\eta\mu\,\phi$$
$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{a}\ell$$
$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = Bv\ell$$
$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = \frac{1}{2}B\omega\ell^2$$
$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$
$$\mathcal{E}_{\alpha\upsilon\tau} = -L\frac{di}{dt}$$
$$L = \mu\mu_0\frac{N^2}{\ell}A$$
$$U = \frac{1}{2}LI^2$$
$$\frac{E}{B} = c$$

$$E = E_{\max}\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$
$$B = B_{\max}\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$
$$v = V\,\eta\mu\,\omega t$$
$$V = NB\omega A$$
$$i = I\,\eta\mu\,\omega t$$
$$i = \frac{v}{R}$$
$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$
$$V_{\varepsilon\nu} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$
$$p = vi$$
$$P = \frac{W}{T}$$

A : Εμβαδόν	V : Διαφορά δυναμικού	q : Ηλεκτρικό φορτίο	v : Στιγμιαία τάση
B : Μαγνητικό πεδίο	ℓ, d, a : Μήκος ή Απόσταση	r : Ακτίνα ή Απόσταση	V : Πλάτος τάσης
E : Ηλεκτρικό πεδίο, ΗΕΔ	U : Ενέργεια Μαγνητικού πεδίου	n : Αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους	i : Στιγμιαία ένταση
$\mathcal{E}$: ΗΕΔ	q : Ηλεκτρικό φορτίο	N : Αριθμός σπειρών	I : Πλάτος έντασης
$\mathcal{E}_{\text{επ.}}$: ΗΕΔ από επαγωγή	R : Αντίσταση	v : Ταχύτητα	$I_{\text{εν}}$: Ενεργός ένταση
$\mathcal{E}_{\text{αυτ.}}$: ΗΕΔ από αυτεπαγωγή	W : Έργο	Φ_B : Μαγνητική ροή	$V_{\text{εν}}$: Ενεργός τάση
L : Συντελεστής αυτεπαγωγής	$R_{\text{ολ}}$: Ολική αντίσταση	ϕ, θ : γωνία	P : Μέση ισχύς
I : Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος	ρ : Ειδική αντίσταση	μ : Μαγνητική διαπερατότητα	p : Στιγμιαία ισχύς
	F : Δύναμη	c : Ταχύτητα του φωτός	R : Αντίσταση
	T : Περίοδος		W : Ενέργεια ηλ. ρεύματος
			Q : Θερμότητα

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

$$\lambda_{\max} T = \text{σταθερό}$$
$$c = \lambda f$$
$$E = hf = pc$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$
$$K = hf - \phi$$

$$\lambda - \lambda' = \frac{h}{mc}(1 - \text{συν}\,\varphi)$$
$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$$
$$\sum |\Psi|^2 dV = 1$$

T : Θερμοκρασία	c : Ταχύτητα φωτός	λ : Μήκος κύματος	ϕ : Έργο εξαγωγής
E : Ενέργεια	f : Συχνότητα	φ : Γωνία	V : Όγκος
p : Ορμή	x : Θέση	t : Χρόνος	Ψ : Κυματοσυνάρτηση

Πολλαπλάσια - Υποπολλαπλάσια

10^{12}	$\rightarrow$	Tera (T)	10^{3}	$\rightarrow$	kilo (k)	10^{-6}	$\rightarrow$	micro (μ)
10^{9}	$\rightarrow$	Giga (G)	10^{-2}	$\rightarrow$	centi (c)	10^{-9}	$\rightarrow$	nano (n)
10^{6}	$\rightarrow$	Mega (M)	10^{-3}	$\rightarrow$	milli (m)	10^{-12}	$\rightarrow$	pico (p)

Σταθερές

Μάζα Πρωτονίου

$m_p = 1,67 \times 10^{-27}\,\text{kg}$

Μάζα Νετρονίου

$m_n = 1,67 \times 10^{-27}\,\text{kg}$

Μάζα Ηλεκτρονίου

$m_e = 9,11 \times 10^{-31}\,\text{kg}$

Απόλυτη τιμή φορτίου ηλεκτρονίου

$e = 1,6 \times 10^{-19}\,\text{C}$

Ηλεκτρονιοβόλτ

$1\,\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19}\,\text{J}$

Ταχύτητα του φωτός

$c = 3 \times 10^{8}\,\text{m/s}$

Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης

$g_0 = 9,8\,\text{m/s}^2$

Ηλεκτρική Σταθερά

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^{9}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$

Σταθερά της Παγκόσμιας Έλξης

$G = 6,67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$

Μαγνητική διαπερατότητα του κενού

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A}$

Σταθερά του Planck

$h = 6,63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$

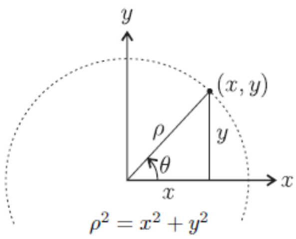
$h = 4,14 \times 10^{-15}\,\text{eV}\cdot\text{s}$

$hc = 12,42 \times 10^{-7}\,\text{eV}\cdot\text{m}$

$hc = 1242\,\text{eV}\cdot\text{nm} \simeq 1200\,\text{eV}\cdot\text{nm}$

Μαθηματικό Βοήθημα

$\theta\,(^\circ)$	$\text{ημ}\,\theta$	$\text{συν}\,\theta$	$\text{εφ}\,\theta$
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
37°	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
53°	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	$-$



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$
$$\text{ημ}\,\theta = \frac{y}{\rho},\ \text{συν}\,\theta = \frac{x}{\rho},\ \text{εφ}\,\theta = \frac{y}{x}$$

Εμβαδόν Παραλληλογράμμου : $A = \beta v$

Περίμετρος Κύκλου : $C = 2\pi r$

Εμβαδόν Κύκλου : $A = \pi r^2$

Εμβαδόν Σφαίρας : $A = 4\pi r^2$

Όγκος Σφαίρας : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Μήκος τόξου κύκλου : $s = \theta r$

$\text{ημ}\,A + \text{ημ}\,B = 2\,\text{συν}\frac{A-B}{2}\,\text{ημ}\frac{A+B}{2}$

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Επώνυμο: …………………………………. Όνομα: …………………… Τάξη: …

Πατρώνυμο: ………………. Μητρώνυμο: …………………

Τηλέφωνα επικοινωνίας: ………………..……….………. email: ………………

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1ο ΘΕΜΑ

Α.1. $|\Delta\vec{s}_A| =$…………, **Α.2.** (Στο τετράδιο), **Α.3.** $u_A =$…………

2ο ΘΕΜΑ

Β.1. $\alpha(t) =$……………….., $x(t) =$……………….., $\omega =$……….., $T =$……….., $A =$………..

Η ταλάντωση ξεκινά από ……………………………………………………

Β.2. (Στο τετράδιο) **Β.3.** $\upsilon_1 =$…………., $s_1 =$…………. **Β.4.** (Στο τετράδιο) $\bar{\upsilon} =$………….

3ο ΘΕΜΑ

Γ.1. (Στο τετράδιο), **Γ.2.** (Στο τετράδιο),

Γ.3.

1. ……………………………………………………………………………………
2. ……………………………………………………………………………………
3. ……………………………………………………………………………………
4. ……………………………………………………………………………………
5. ……………………………………………………………………………………
6. ……………………………………………………………………………………
7. ……………………………………………………………………………………
8. ……………………………………………………………………………………
9. ……………………………………………………………………………………
10. ……………………………………………………………………………………
11. ……………………………………………………………………………………
12. ……………………………………………………………………………………
13. ……………………………………………………………………………………
14. ……………………………………………………………………………………
15. ……………………………………………………………………………………
16. ……………………………………………………………………………………

Γ4. (Στο τετράδιο)

Καλή επιτυχία!

Συνοπτικές Απαντήσεις

1ο ΘΕΜΑ

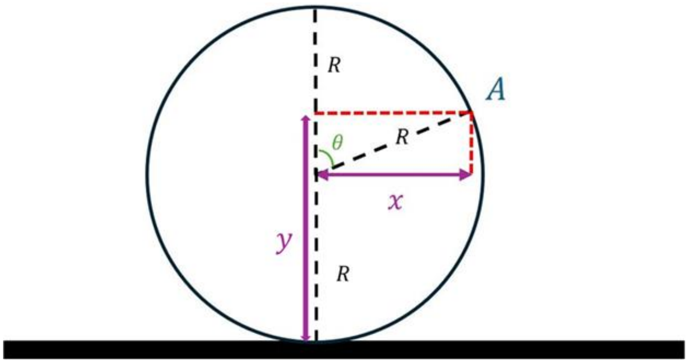
Α.1. Από την αρχή της επαλληλίας μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση του σημείου Α ως δύο ανεξάρτητες κινήσεις. Μία μεταφορική στον οριζόντιο άξονα, όπως όλα τα σημεία του τροχού, και μία περιστροφική γύρω από το κέντρο K.

Η μεταφορική κίνηση γίνεται μόνο στον άξονα x και δίνει ως συνιστώσα της μετατόπισης:

$$x_1(t) = u_K \cdot t = \omega R \cdot t$$

(λόγω της κ.χ.ο. $u_K = u_{\gamma\rho\ \pi\varepsilon\rho\iota\varphi\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\iota\alpha\varsigma} = \omega R$)

Για την περιστροφική κίνηση σχεδιάζουμε στο σχήμα ένα τυχαίο στιγμιότυπο της κίνησης, όπου η επιβατική ακτίνα σχηματίζει με τον κατακόρυφο ημιάξονα γωνία $\theta = \omega t$.



Βλέπουμε ότι:

$$x_2(t) = R \cdot \eta\mu(\theta) = R \cdot \eta\mu(\omega t)$$

$$y(t) = R + R\sigma\upsilon\nu(\theta) = R + R\sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

Άρα η μετατόπιση στον άξονα x είναι:

$$|\Delta\vec{x}| = x_1 + x_2 - x(0) = \omega R t + R\eta\mu(\omega t) - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |\Delta\vec{x}| = \omega R t + R\eta\mu(\omega t)$$

με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

και η μετατόπιση στον άξονα y είναι:

$$|\Delta\vec{y}| = |y(t) - y(0)| = |R + R\sigma\upsilon\nu(\omega t) - 2R| = R - R\sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

με κατεύθυνση προς τα κάτω

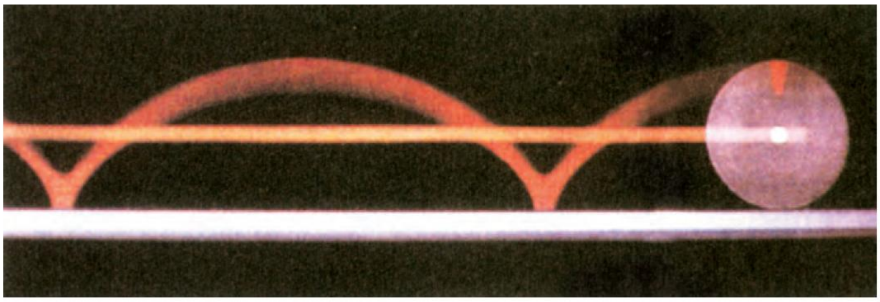
Οπότε η συνολική μετατόπιση είναι:

$$|\Delta\vec{s}_A| = \sqrt{|\Delta\vec{x}|^2 + |\Delta\vec{y}|^2} = \sqrt{[\omega R t + R\eta\mu(\omega t)]^2 + [R - R\sigma\upsilon\nu(\omega t)]^2} =$$

$$= R\sqrt{\omega^2 t^2 + 2\omega t \cdot \eta\mu(\omega t) + \eta\mu^2(\omega t) + 1 - 2\sigma\upsilon\nu(\omega t) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t)} =$$

$$= R\sqrt{\omega^2 t^2 + 2\omega t \cdot \eta\mu(\omega t) + 2 - 2\sigma\upsilon\nu(\omega t)}$$

Α.2. Από πειραματικά δεδομένα (σχολικό βιβλίο, Τ.3, σελ. 111) γνωρίζουμε ότι η μορφή της τροχιάς είναι η ακόλουθη:



Η τροχιά ενός μικρού λαμπτήρα που τοποθετήθηκε στην περιφέρεια κυλιόμενου τροχού. Το κέντρο του τροχού κινείται ευθύγραμμα.
Εικόνα 4-1.

Από τις εξισώσεις του ερωτήματος Α.1. έχουμε:

$$x(t) = x_1 + x_2 = \omega R t + R\eta\mu(\omega t)$$
$$y(t) = R + R\sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

Από την δεύτερη εξίσωση παρατηρούμε ότι οι ακρότατες τιμές του y είναι 0 και $2R$.

Η ελάχιστη τιμή παρατηρείται όταν:

$$y(t) = 0 \Rightarrow R\sigma\upsilon\nu(\omega t) = -R \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t) = -1 \Rightarrow \omega t = 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{N}$$

Για αυτές τις χρονικές στιγμές είναι

$$x(t) = 2k\pi R + \pi R + 0 = (2k+1)\pi R$$

Για την μέγιστη τιμή ισχύει αντίστοιχα:

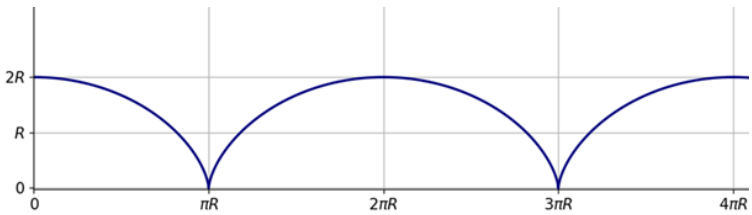
$$y(t) = 2R \Rightarrow R = R\sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t) = 1 \Rightarrow \omega t = 2k\pi, k \in \mathbf{N}$$

Για αυτές τις χρονικές στιγμές είναι

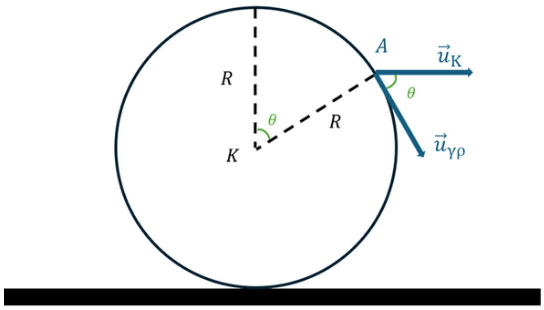
$$x(t) = \omega R t + R\eta\mu(\omega t) = 2k\pi R + R\eta\mu(2k\pi) = 2k\pi R$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το y λαμβάνει τη μέγιστη τιμή $2R$ όταν το x είναι άρτιο πολλαπλάσιο του πR και την ελάχιστη τιμή 0 όταν το x είναι περιττό πολλαπλάσιο του πR.

Το διάγραμμα θα έχει την μορφή που φαίνεται ακολούθως:



Α.3. Μπορούμε να βρούμε τις ταχύτητες των δύο κινήσεων που εκτελεί το σημείο Α και να τις προσθέσουμε διανυσματικά. Αφού ο τροχός εκτελεί κ.χ.ο. και το σημείο Α βρίσκεται στην περιφέρεια, η γραμμική ταχύτητα περιστροφής του είναι ίση σε μέτρο με την ταχύτητα του κέντρου μάζας, άρα με την ταχύτητα του Α λόγω της μεταφορικής κίνησής του. Οπότε για να τις προσθέσουμε διανυσματικά αρκεί να βρούμε την μεταξύ τους γωνία. Για αυτό θα ξανασχεδιάσουμε το τυχαίο στιγμιότυπο του ερωτήματος Α.1.



Εδώ παρατηρούμε πως η γωνία ανάμεσα στις δύο ταχύτητες είναι ίση με τη γωνία θ καθώς η $\vec{u}_K$ είναι κάθετη στην κατακόρυφη και η γραμμική ταχύτητα του σημείου είναι κάθετη στην επιβατική ακτίνα, οπότε είναι γωνίες με πλευρές κάθετες. (Στην περίπτωση που η θ είναι αμβλεία τότε το Α θα βρίσκεται αριστερότερα της κατακόρυφης διαμέτρου του τροχού, άρα η γωνία των δύο ταχυτήτων θα είναι επίσης αμβλεία).

Οπότε εφαρμόζοντας τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε ότι:

$$u_A = \sqrt{u_K^2 + u_{\gamma\rho}^2 + 2u_K u_{\gamma\rho}\text{συν}(\theta)} = \sqrt{2\omega^2R^2 + 2\omega^2R^2\sigma\upsilon\nu(\omega t)} = \omega R\sqrt{2 + 2\sigma\upsilon\nu(\omega t)}$$

2ο ΘΕΜΑ

Β.1. Από την συνάρτηση της ταχύτητας προκύπτει ότι:

- η επιτάχυνση της πλατφόρμας δίνεται από την σχέση $\alpha = -12\eta\mu\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$ $(S.I.)$,
- η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\omega = \pi\, rad/s$,
- η περίοδος της ταλάντωσής της είναι $T = 2s$,
- η εξίσωση ταλάντωσης είναι $x = A\eta\mu\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{9\pi}\eta\mu\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$

Με βάση την δοθείσα προσέγγιση του π, προκύπτει $A = \frac{100}{81}m$.
Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι η ταλάντωση ξεκινά από την αρνητική ακραία θέση.

Β.2. Κατά την εκκίνηση της ταλάντωσης και για το χρονικό διάστημα $t \in \left[0\,, \frac{T}{4}\right]$ η πλατφόρμα επιταχύνεται θετικά. Ο κύβος, μάζας έστω m, τείνει να ολισθήσει προς τα πίσω (αρνητικά). Επειδή $\alpha_{\pi\lambda\alpha\tau\varphi(max)} = 12\frac{m}{s^2} < \frac{T_{s(1)}}{m} = \mu_{s(1)}g = 20\frac{m}{s^2}$, ο κύβος δεν ολισθαίνει.
Μετά τη στιγμή $t = T/4 = 0{,}5s$, η πλατφόρμα επιβραδύνεται. Ο κύβος τείνει να ολισθήσει προς τα εμπρός (θετικά) λόγω αδράνειας. Η ολίσθηση ξεκινά όταν η απαιτούμενη δύναμη για την κίνηση του κύβου υπερβαίνει τη μέγιστη στατική τριβή, δηλαδή όταν:

$$\alpha_{\pi\lambda\alpha\tau\varphi} = -\mu_{s(2)} \cdot g \Rightarrow \alpha_{\pi\lambda\alpha\tau\varphi} = -6\frac{m}{s^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{\pi\lambda\alpha\tau\varphi} = -\frac{\alpha_{\pi\lambda\alpha\tau\varphi(max)}}{2}$$

άρα όταν

$$\eta\mu\left(\pi t_1 + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\left(\pi t_1 + \frac{3\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi t_1 + \frac{3\pi}{2} = \begin{cases} 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ 2\kappa\pi + \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \pi t_1 = \begin{cases} 2\kappa\pi - \dfrac{8\pi}{6} \\ 2\kappa\pi - \dfrac{4\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow t_1 = \begin{cases} \dfrac{12\kappa - 8}{6} \\ \dfrac{12\kappa - 4}{6} \end{cases}$$

Οι δύο αυτές σειρές λύσεων δίνουν θετικές τιμές για $\kappa \geq 1$. Η πρώτη από αυτές, δηλαδή η στιγμή που αρχίζει η ολίσθηση του κύβου προς τα δεξιά, είναι:

$$t_1 = \frac{2}{3}s \Rightarrow t_1 = \frac{1}{3}T$$

Δηλαδή, για $t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{T}{3}\right]$ ο κύβος **δεν** ολισθαίνει.

Β.3. Αφού η ολίσθηση του κύβου ξεκινά την στιγμή t_1, συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητά του ως εκείνη την στιγμή είναι ίδια με της πλατφόρμας, δηλαδή:

$$\upsilon_1 = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\left(\omega t_1 + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 = \frac{20\sqrt{3}}{9}\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{T}{3} + \frac{3\pi}{2}\right)\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{20\sqrt{3}}{9}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{6}\right)\frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 = \frac{20\sqrt{3}}{9}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{20\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 = \frac{10}{3}\frac{m}{s}$$

και η θέση του είναι:

$$x_1 = A\eta\mu\left(\pi\frac{T}{3} + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow x_1 = \frac{A}{2}\ (S.I.)$$

Δηλαδή, ως εκείνη την στιγμή έχει διανύσει συνολική απόσταση:

$$s_1 = A + \frac{A}{2} \Rightarrow s_1 = \frac{3A}{2} \Rightarrow s_1 = \frac{3\,\frac{100}{81}}{2}m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_1 = \frac{50}{27} m$$

Β.4. Ακολούθως, ο κύβος δέχεται τριβή ολίσθησης, άρα, ως προς το Σύστημα Αναφοράς του Εργαστηρίου, κινείται με σταθερή επιβράδυνση

$$a = \mu_{k(2)} \cdot g = 2{,}5 \frac{m}{s^2}$$

Από τις εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης υπολογίζουμε ότι η ταχύτητα μηδενίζεται μετά από χρονικό διάστημα:

$$\Delta t_{max} = \frac{\upsilon_{\alpha\rho\chi}}{\alpha} \Rightarrow \Delta t_{max} = \frac{\upsilon_1}{\alpha} \Rightarrow \Delta t_{max} = \frac{\frac{10}{3}}{2{,}5} s \Rightarrow \Delta t_{max} = \frac{4}{3} s \Rightarrow \Delta t_{max} = \frac{2}{3} T$$

ή, αλλιώς, την στιγμή:

$$t_2 = \frac{1}{3} T + \frac{2}{3} T = T$$

δηλαδή ακριβώς στο τέλος της 1ης περιόδου.
Στο χρονικό διάστημα $t \in \left[\frac{T}{3}, \frac{T}{2}\right]$ η πλατφόρμα επιβραδύνεται καθώς η απομάκρυνσή της αυξάνεται προς την τιμή A, ενώ για $t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$ συνεχίζει την ταλάντωση κινούμενη προς τα αριστερά. Δηλαδή στο διάστημα $t \in \left[\frac{T}{3}, T\right]$ πράγματι ο κύβος συνεχίζει να ολισθαίνει προς τα δεξιά.
Βάσει αυτού του αποτελέσματος, το πρόσθετο διάστημα που διανύει ο κύβος ως προς το Σύστημα Αναφοράς του Εργαστηρίου στο χρονικό διάστημα $\left[\frac{T}{3}, T\right]$ είναι:

$$x_{max} = \frac{{\upsilon_{\alpha\rho\chi}}^2}{2\alpha} \Rightarrow x_{max} = \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2}{2 \cdot 2{,}5} m \Rightarrow x_{max} = \frac{20}{9} m$$

(λόγω του μεγάλου μήκους της πλατφόρμας ο κύβος έχει επαρκή χώρο κίνησης).
Συνεπώς:

$$\bar{\upsilon} = \frac{s_{o\lambda}}{t_{o\lambda}} \Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{s_1 + x_{max}}{T} \Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{\frac{50}{27} + \frac{20}{9}}{2} \frac{m}{s} \Rightarrow$$

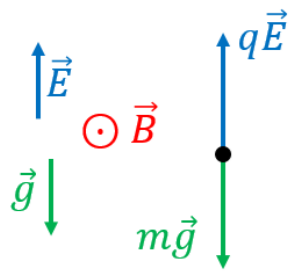
$$\Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{110}{54} \frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{\upsilon} \cong 2 \frac{m}{s}$$

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται και στην δεύτερη περίοδο καθώς και σε κάθε επόμενη, έως ότου ο κύβος φτάσει στο δεξιό άκρο της πλατφόρμας και προσγειωθεί κατόπιν στο πάτωμα του Εργαστηρίου.

3ο ΘΕΜΑ

Γ.1. Η ένταση του βαρυτικού πεδίου έχει κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα κάτω. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι αντίρροπη της $\vec{g}$, δηλαδή είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω. Αφού η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετη στην $\vec{E}$ συμπεραίνουμε ότι είναι οριζόντια.
Την χρονική στιγμή $t_o = 0$ η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι 0, συνεπώς δεν δέχεται δύναμη από το μαγνητικό πεδίο.
Το ζητούμενο σχήμα είναι το ακόλουθο:



Γ.2. Από την σχέση $|q\vec{E}| = |m\vec{g}|$ προκύπτει $\sum F = 0$. Εφόσον το σώμα τοποθετείται στον χώρο χωρίς αρχική ταχύτητα, συμπεραίνουμε ότι θα παραμείνει ακίνητο υπό την επίδραση βαρυτικού και ηλεκτρικού πεδίου. Το μαγνητικό πεδίο δεν επηρεάζει το υλικό σημείο.
Γ.3. Κατά την διεξαγωγή ενός πειράματος αναπόφευκτα συμβαίνουν πειραματικά σφάλματα, τόσο τυχαία όσο και συστηματικά. Σε αυτά περιλαμβάνονται:

1. Κατασκευαστικές ατέλειες οργάνων (λανθασμένη βαθμονόμηση).
2. Περιορισμένη ακρίβεια οργάνων.
3. Σφάλμα μηδενός στα όργανα μέτρησης απόστασης.
4. Λανθασμένη ανάγνωση ενδείξεων (σφάλμα παράλλαξης).
5. Άλλες δυνάμεις (π.χ. άνωση, αντίσταση του αέρα, …).
6. Θερμική διαστολή διατάξεων και κλιμάκων μέτρησης.
7. Μη μηδενικές (πραγματικές) διαστάσεις σώματος.
8. Μικρό πλήθος μετρήσεων.
9. Σφάλματα που προκύπτουν από τον χρόνο αντίδρασης του ανθρώπου.
10. Εκκίνηση με μη μηδενική αρχική ταχύτητα.
11. Το σώμα αφήνεται από ύψος $h < y_{max}$.
12. Τα πεδία δεν είναι απόλυτα ομογενή.
13. Οι σχετικοί προσανατολισμοί των τριών πεδίων δεν είναι απόλυτα σύμφωνοι με την θεωρητική περιγραφή.
14. Αβεβαιότητες στις τιμές της μάζας m και του φορτίου q.
15. Μερική εκφόρτιση του σώματος λόγω αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον.

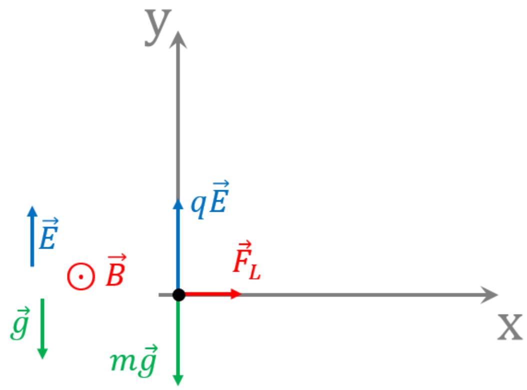
16. Επίδραση στατικών φορτίων του περιβάλλοντος.

Γ.4. Αφού μελετάμε την περίπτωση $|q\vec{E}| > |m\vec{g}|$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\sum F = m\vec{g} + q\vec{E} \upuparrows \vec{E}$$

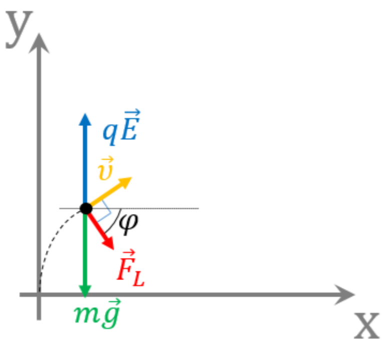
Επομένως, την στιγμή $t_o = 0$ το υλικό σημείο επιταχύνεται προς τα πάνω. Μόλις αποκτήσει ταχύτητα εμφανίζεται δύναμη $\vec{F}_L$ από το μαγνητικό πεδίο με κατεύθυνση που προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Γ.4.1. Προκειμένου να έχουμε απλούστερες εξισώσεις κίνησης (με μηδενική αρχική μετατόπιση) επιλέγουμε ένα Σύστημα Αναφοράς (Σ.Α.) με αφετηρία την αρχική θέση του υλικού σημείου, όπως στο διπλανό σχήμα.



Γ.4.2. Εξ αιτίας της $\vec{F}_L$, η τροχιά του υλικού σημείου είναι καμπύλη με τα κοίλα προς τα κάτω. Λόγω της κατακόρυφης γραμμικής επιτάχυνσης, η τροχιά δεν είναι κυκλική. Η επιτρόχια ταχύτητα είναι διαρκώς εφαπτομενική στην τροχιά και σχηματίζει ορθή γωνία με την $\vec{F}_L$.

Γ.4.3. Έτσι, σε κάποια χρονική στιγμή μετά την t_o, έχουμε την κατάσταση του επόμενου σχήματος, όπου η $\vec{F}_L$ σχηματίζει γωνία $\varphi < 0$ με τον οριζόντιο θετικό ημιάξονα:



Γ.4.4. Βρίσκουμε τις συνιστώσες της $\vec{F}_L$ στο Σ.Α. και εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Newton κατά άξονα:

Ι) Άξονας $x'x$

$$\sum F_x = qBv \cdot συνφ \Rightarrow m\alpha_x = qBv \cdot συνφ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\alpha_x = qBv_y \Rightarrow m\frac{dv_x}{dt} = qB\frac{dy}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dv_x = \frac{qB}{m}dy \quad (1)$$

Ολοκληρώνοντας από την αρχική μέχρι μια τυχαία θέση Α, όπου η κατακόρυφη μετατόπιση είναι, έστω, y_A και η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας είναι, έστω, v_{Ax}, βρίσκουμε:

$$\upsilon_{Ax} = \frac{qB}{m} y_A \qquad (2)$$

Γ.4.5. Για τις ίδιες θέσεις εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας:

$$K_o + W_{F_{\eta\lambda}} + W_w = K_A \Rightarrow$$

$$0 + qEy_A - mgy_A = \frac{1}{2} m\upsilon_A^2 \Rightarrow \upsilon_A^2 = \frac{2y_A(qE - mg)}{m} \qquad (3)$$

Όμως:

$$\upsilon_A^2 = \upsilon_{Ax}^2 + \upsilon_{Ay}^2 \Rightarrow \upsilon_{Ay}^2 = \upsilon_A^2 - \upsilon_{Ax}^2 \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \upsilon_{Ay}^2 = \frac{2y_A(qE - mg)}{m} - \frac{q^2B^2}{m^2} y_A^2 \qquad (4)$$

Γ.4.6. Αφού $\upsilon_{Ay}^2 \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{2y_A(qE - mg)}{m} - \frac{q^2B^2}{m^2} y_A^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_A \left(\frac{2(qE - mg)}{m} - \frac{q^2B^2}{m^2} y_A \right) \geq 0 \qquad (5)$$

Λόγω της υπόθεσης $|q\vec{E}| > |m\vec{g}|$ ο όρος $\frac{2(qE-mg)}{m}$ είναι θετικός. Άρα:

$$\frac{2(qE - mg)}{m} \geq \frac{q^2B^2}{m^2} y_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_A \leq \frac{2m(qE - mg)}{q^2B^2}$$

$$\Rightarrow y_A \leq \frac{2m(qE - mg)}{q^2B^2} \qquad (6)$$

Εναλλακτικά, η σχέση $\frac{2y_A(qE-mg)}{m} - \frac{q^2B^2}{m^2} y_A^2 \geq 0$ προβλέπει ότι το τριώνυμο

$$-\frac{q^2B^2}{m^2} y_A^2 + \frac{2y_A(qE - mg)}{m} + 0 = 0$$

είναι ετερόσημο του συντελεστή $\alpha = -\frac{q^2B^2}{m^2}$, άρα το y βρίσκεται εντός των ριζών, δηλαδή και πάλι $0 \leq y_A \leq \frac{2m(qE-mg)}{q^2B^2}$.

Από την (6) συμπεραίνουμε ότι:

$$y_{max} = \frac{2m(qE - mg)}{q^2B^2} \qquad (7)$$

Από την σχέση (3) έχουμε:

$$\upsilon = \sqrt{2y\frac{(qE-mg)}{m}} \overset{(7)}{\Rightarrow} \upsilon_{max} = \sqrt{2\frac{2m(qE-mg)}{q^2B^2}\cdot\frac{(qE-mg)}{m}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \upsilon_{max} = \frac{2(qE-mg)}{qB}$$

Γ.4.7.

II) Άξονας $y'y$

$$\sum F_y = qE - mg - qB\upsilon\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow \sum F_y = qE - mg - qB\upsilon_x \overset{(2)}{\Rightarrow}$$
$$\sum F_y = qE - mg - \frac{q^2B^2}{m}y \qquad (8)$$

Η $\sum F_y$ μηδενίζεται σε μία θέση με τεταγμένη, έστω, y_o, όπου:

$$qE - mg - \frac{q^2B^2}{m}y_o = 0 \Rightarrow y_o = \frac{m(qE-mg)}{q^2B^2} \qquad (9)$$

Θέτουμε:

$$y = y_o + y' \qquad (10)$$

Οπότε η (8) γίνεται:

$$\sum F_y = qE - mg - \frac{q^2B^2}{m}(y_o + y') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum F_y = qE - mg - \frac{q^2B^2}{m}y_o - \frac{q^2B^2}{m}y \overset{(9)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(9)}{\Rightarrow} \sum F_y = qE - mg - (qE-mg) - \frac{q^2B^2}{m}y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum F_y = -\frac{q^2B^2}{m}y$$

Η ποσότητα $\frac{q^2B^2}{m}$ είναι σταθερή, άρα η κατακόρυφη συνιστώσα της κίνησης είναι Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς

$$D = \frac{q^2B^2}{m} \qquad (11)$$

κυκλική συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\frac{q^2B^2}{m}}{m}} \Rightarrow \omega = \frac{qB}{m} \qquad (12)$$

και

$$2A = y_{max} \overset{(7)}{\Rightarrow} A = \frac{m(qE-mg)}{q^2B^2} \qquad (13)$$

δηλαδή ισχύει

$$y' = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \qquad (14)$$

Γνωρίζουμε ότι την στιγμή t_o είναι $y = 0$, δηλαδή $y' = -y_o = -A$.

Άρα

$$\varphi_o = \frac{3\pi}{2} \tag{15}$$

Τελικά λοιπόν

$$(10) \xRightarrow{(9),(14),(13)} y = \frac{m(qE-mg)}{q^2B^2} + \frac{m(qE-mg)}{q^2B^2}\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{m(qE-mg)}{q^2B^2}\left[1 + \eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{m(qE-mg)}{q^2B^2}[1 - \sigma\upsilon\nu(\omega t)] \tag{16}$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sigma\upsilon\nu 2\theta = 1 - 2\eta\mu^2\theta$$

έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\omega t = 1 - 2\eta\mu^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \Rightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu\omega t = 2\eta\mu^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

οπότε η (16) γίνεται:

$$\Rightarrow y = \frac{m(qE-mg)}{q^2B^2}2\eta\mu^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2m(qE-mg)}{q^2B^2}\eta\mu^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \tag{17}$$

Γ.4.8. Για την ταχύτητα έχουμε:

$$(3) \xRightarrow{(17)} \upsilon = \sqrt{\frac{2(qE-mg)}{m} \cdot \frac{2m(qE-mg)}{q^2B^2}\eta\mu^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)} \Rightarrow \upsilon = \frac{2(qE-mg)}{qB}\left|\eta\mu\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = \frac{2(qE-mg)}{qB}\left|\eta\mu\left(\frac{qB}{2m}t\right)\right| \tag{18}$$

Εναλλακτικά

$$(3) \xRightarrow{(16)} \upsilon = \sqrt{\frac{2(qE-mg)}{m} \cdot \frac{m(qE-mg)}{q^2B^2}[1 + \eta\mu(\omega t + \varphi_o)]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = \frac{qE-mg}{qB}\sqrt{2\left[1 + \eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = \frac{qE-mg}{qB}\sqrt{2[1 - \sigma\upsilon\nu(\omega t)]}$$

Με χρήση και πάλι της τριγωνομετρικής ταυτότητας η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\upsilon = \frac{qE-mg}{qB}\sqrt{4\eta\mu^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)} \Rightarrow \upsilon = \frac{2(qE-mg)}{qB}\left|\eta\mu\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = \frac{2(qE-mg)}{qB}\left|\eta\mu\left(\frac{qB}{2m}t\right)\right| \tag{18}$$

Για την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας έχουμε:

$$(2) \overset{(16)}{\Longrightarrow} \upsilon_x = \frac{qB}{m} \cdot \frac{m(qE - mg)}{q^2B^2}[1 - \sigma\upsilon\nu(\omega t)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_x = \frac{qE - mg}{qB}\left[1 - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{qB}{m}t\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_x = 2\frac{qE - mg}{qB}\eta\mu^2\left(\frac{qB}{2m}t\right) \qquad (19)$$