Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής “Αριστοτέλης” - Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών / Τμήμα Φυσικής
Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2026 - Β΄ Τάξη

24/4/2026

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Η αναλυτική λύση των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε τετράδιο ή σε φύλλα Α4 που θα σας δοθούν. Στον κατάλληλο χώρο του τετραδίου ή στην πρώτη σελίδα Α4 θα αναγράψετε τα ονομαστικά στοιχεία σας
2. Όλα τα ζητούμενα αριθμητικά αποτελέσματα πρέπει ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ να μεταφερθούν στο ***Φύλλο Απαντήσεων*** που θα βρείτε αμέσως μετά τις εκφωνήσεις και το τυπολόγιο.
3. Όπου ζητούνται γραφήματα θα σχεδιαστούν στους ειδικούς χώρους του ***Φύλλου Απαντήσεων***.
4. Στο τέλος της εξέτασης θα παραδώσετε το τετράδιο (ή τα φύλλα Α4) με τις αναλυτικές λύσεις σας ΜΑΖΙ με το φύλλο απαντήσεων.
5. Το Φύλλο Απαντήσεων θα συρραφεί στο τετράδιο (ή στα φύλλα Α4).
6. Τα ονομαστικά στοιχεία θα καλυφθούν με μαύρο αυτοκόλλητο.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1ο ΘΕΜΑ

Στα άκρα B και Γ ευθύγραμμου τμήματος $(B\Gamma) = 9\ cm$ τοποθετούνται τα φορτία $q_1 = +3\mu C$ και $q_2 = -6\ \mu C$ αντίστοιχα.

Α.1. Να αποδειχθεί ότι στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία B και Γ υπάρχουν δυο (2) σημεία με δυναμικό μηδέν έστω τα Δ και E.

Α.2. Να αποδειχθεί ότι το σημείο A του επιπέδου που απέχει από το B απόσταση $(AB) = 4\ cm$ και από το Γ απόσταση $(A\Gamma) = 8\ cm$ έχει δυναμικό μηδέν.

Α.3. Θεωρήστε σύστημα συντεταγμένων Oxy με το σημείο O τοποθετημένο στο μέσον της απόστασης (ΔE) και τον άξονα Ox να ταυτίζεται με την ευθεία που ορίζει το ευθύγραμμο τμήμα $(B\Gamma)$. Το σημείο A του προηγούμενου ερωτήματος έχει συντεταγμένες ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων $A(x, y)$.

Α.3.1. Να υπολογίσετε τη σχέση συντεταγμένων του (x,y).

Α.3.2. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης αυτής.

Α.3.3. Να προσδιορίσετε τα σημεία του επιπέδου που έχουν δυναμικό μηδέν.

2ο ΘΕΜΑ

Δύο αστικοί δρόμοι σχηματίζουν ορθογώνια διασταύρωση. Στον πρώτο κινείται όχημα Α με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon_A = 8m/s$, ενώ στον δεύτερο όχημα Β με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon_B = 6m/s$. Κάποια στιγμή που την θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου, το Α απέχει από την διασταύρωση απόσταση $x_o = 90m$ και το Β $y_o = 120m$. Θεωρώντας τις διαστάσεις των οχημάτων αμελητέες:

Β.1. να βρείτε την απόσταση d_o των δύο οχημάτων την στιγμή $0s$,

Β.2. να αποδείξετε ότι η απόσταση d των δύο οχημάτων συναρτήσει του χρόνου t δίνεται από την σχέση $d = 10\sqrt{t^2 - 28{,}8t + 225}\ \ (S.I.)$,

Β.3. να βρείτε την χρονική στιγμή t_{min} κατά την οποία η απόσταση των δύο οχημάτων γίνεται ελάχιστη,

Β.4. να βρείτε την ελάχιστη απόσταση d_{min}.

Δίνεται $42^2 = 1.764$.

3ο ΘΕΜΑ

Στις 6 Απριλίου 2026 και ώρα 9:30 π.μ. το διαστημόπλοιο Orion, τμήμα της αποστολής *Άρτεμις ΙΙ*, ήταν καθοδόν προς την Σελήνη, έχοντας σβηστή την μηχανή του. Σε στιγμιότυπο από την ιστοσελίδα της Αμερικανικής Υπηρεσίας Αεροναυτικής και Διαστήματος (NASA) βλέπουμε αναπαράσταση της θέσης του και των χαρακτηριστικών τη κίνησής του τη συγκεκριμένη στιγμή (πηγή: https://www.nasa.gov/missions/artemis-ii/arow/).

Στο κάτω μέρος του στιγμιοτύπου διαβάζουμε, ανάμεσα στα άλλα:

VELOCITY: **1328 MPH**
DISTANCE FROM EARTH: **234621 MILES**
DISTANCE TO MOON: **36896 MILES**

Επίσης είναι γνωστά τα εξής δεδομένα: Μάζα της Γης= $5{,}97 \times 10^{24}\, kg$, $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\, Nm^2/kg^2$, $1\, μίλι = 1\, mile = 1{,}61\, km$, MPH=miles per hour.

Γ.1. Λαμβάνοντας υπόψη μόνο τη βαρυτική επίδραση της Γης στο Orion, και θεωρώντας πως η κίνησή του είναι ευθύγραμμη, υπολογίστε σε πόση απόσταση r_{max} από τη Γη θα κατάφερνε να φτάσει το Orion διατηρώντας σβηστή τη μηχανή του. Να γράψετε την απάντηση με 3 σημαντικά ψηφία.

Γ.2. Με βάση την προηγούμενη απάντηση, και με τα δεδομένα που δόθηκαν παραπάνω, εξηγήστε αν με τη συγκεκριμένη ταχύτητα θα κατάφερνε να φτάσει στην τροχιά της Σελήνης.

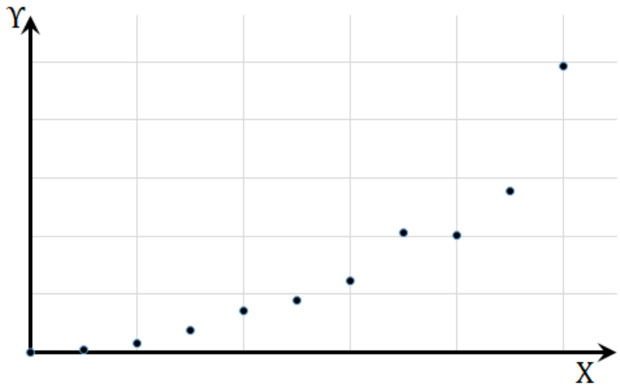
Γ.3. Ανακοινώθηκε πως η απόσταση που έφτασαν οι αστροναύτες του Orion από τη Γη ήταν η μεγαλύτερη που έχουν φτάσει αστροναύτες στην ιστορία, και πως αυτή είναι ίση με $406.000\ km$. Εξηγήστε γιατί αυτή η τιμή είναι διαφορετική από αυτήν που υπολογίσατε και συζητήσατε στα δύο πρώτα ερωτήματα.

Γ.4. Στην εικόνα, η αναπαράσταση δείχνει το πίσω μέρος του Orion, κάτι που σημαίνει πως φαίνεται να μην κατευθύνεται ακριβώς προς τη Σελήνη, η οποία στην εικόνα φαίνεται στα δεξιά. Παρόλα αυτά, και η κίνηση του Orion είναι σχεδόν ευθύγραμμη για το τελευταίο τμήμα της κίνησης, και η εικόνα δείχνει τη σωστή θέση της Σελήνης, αλλά και το Orion συνεχίζοντας την πορεία του θα περάσει πρακτικά σχεδόν δίπλα από τη Σελήνη. Εξηγήστε πώς συμβιβάζονται όλα αυτά.

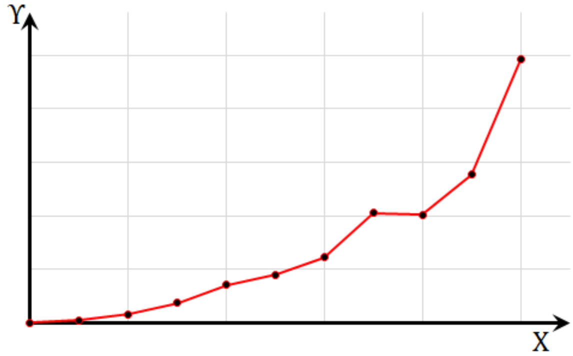
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

4ο ΘΕΜΑ

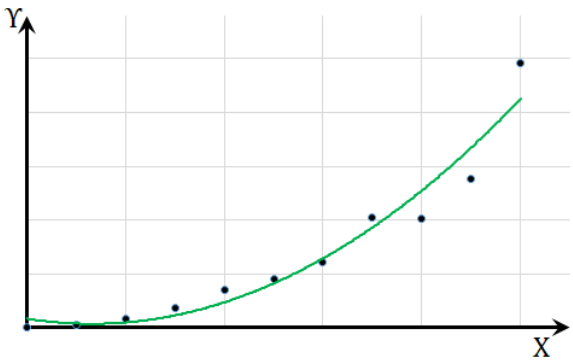
Η Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων (Μ.Ε.Τ.) είναι μια μαθηματική διαδικασία που μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την ποσοτική σχέση μεταξύ δύο φυσικών ποσοτήτων, έστω X και Y.



Για παράδειγμα, εκτελούμε ένα πείραμα στο οποίο μεταβάλουμε τις τιμές του μεγέθους X (έστω 11 τιμές) και μετράμε τις αντίστοιχες τιμές του Y. Κατόπιν απεικονίζουμε τις μετρήσεις σε γραφική παράσταση, όπως στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι, λόγω σφαλμάτων, τα σημεία δεν βρίσκονται κατά μήκος μιας ομαλής καμπύλης.



Προκειμένου να δούμε ποια τιμή θα έπαιρνε το μέγεθος Y για κάποια τιμή του X διαφορετική των μετρήσεων, το **χειρότερο** που θα μπορούσαμε να κάνουμε θα ήταν να ενώσουμε τα σημεία με τεθλασμένη γραμμή. Αυτό θα σήμαινε ότι η σχέση των δύο μεγεθών είναι γραμμική, δηλαδή της μορφής $Y = m + nX$, με τους συντελεστές m και n να λαμβάνουν διαφορετικές τιμές για κάθε ζευγάρι διαδοχικών τιμών του X. Σίγουρα, αυτή δεν είναι η κατάσταση που ισχύει στην Φύση!



Το **καλύτερο** που θα μπορούσαμε να κάνουμε θα ήταν να εφαρμόσουμε την Μ.Ε.Τ., ώστε να βρούμε μια ομαλή γραμμή (η μορφή της οποίας, στην γενική περίπτωση, είναι καμπύλη), από την οποία όλα τα πειραματικά προσδιορισμένα σημεία απέχουν ελάχιστες αποστάσεις, μια καμπύλη δηλαδή που αποτελεί την καλύτερη (βέλτιστη) προσέγγιση όλων των μετρήσεων *ταυτοχρόνως*. Όπως φαίνεται από το σχήμα, ενδέχεται ούτε ένα σημείο να βρίσκεται πάνω

στην καμπύλη. Όμως αυτό, δεν αναιρεί το γεγονός ότι η συγκεκριμένη γραμμή είναι η καλύτερη προσέγγιση.
Υπάρχουν παραλλαγές της Μ.Ε.Τ. που προσεγγίζουν καλύτερα τη νοητή καμπύλη που (φαίνεται ότι) σχηματίζουν τα πειραματικά σημεία. Αυτές περιλαμβάνουν ευθεία γραμμή, πολυωνυμική, εκθετική και άλλες.
Στην συνέχεια της άσκησης αυτής, θα περιοριστούμε σε γραμμική εξάρτηση, δηλαδή της μορφής $Y = a + bX$. Η Μ.Ε.Τ. μάς επιτρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές των συντελεστών a (σταθερός όρος) και b (συντελεστής του πρωτοβάθμιου όρου), μαζί με τα σφάλματά τους δa και δb αντίστοιχα.
Αν λοιπόν έχουμε n μετρήσεις (στο παράδειγμά μας είναι $n = 11$), ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{D} \qquad b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{D} \qquad D = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$$\delta\alpha = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{D}} \qquad \delta b = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{D}} \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b \cdot x_i)^2}{n-2}}$$

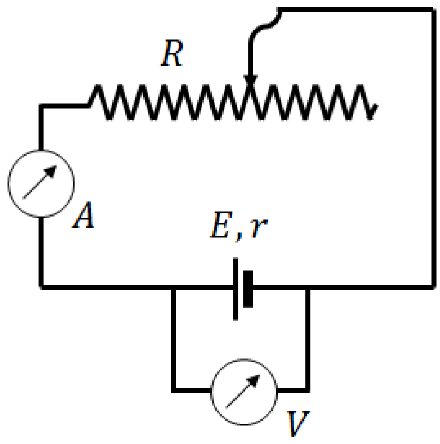
όπου το σύμβολο

$$\sum_{i=1}^{n}$$

είναι μια συντομογραφία της άθροισης των n τιμών. Για παράδειγμα:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Αν και η επιλογή να μελετήσουμε μόνο την γραμμική περίπτωση μοιάζει εξαιρετικά περιοριστική, αυτό δεν ισχύει στην πραγματικότητα και μπορούμε να εφαρμόσουμε την Μ.Ε.Τ. σε πολλές περιπτώσεις, οι οποίες, με την πρώτη ματιά, δεν παρουσιάζουν γραμμικότητα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης χωρίς αρχική ταχύτητα, η μετατόπιση x είναι ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου t: $x = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$ και η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι παραβολή. Αν όμως θεωρήσουμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή το t^2 αντί του t, και τοποθετήσουμε αυτές τις τιμές στον οριζόντιο άξονα, τότε η γραφική παράσταση γίνεται ευθεία και η Μ.Ε.Τ. μπορεί να εφαρμοστεί άνετα!



Δ.1. Θα χρησιμοποιήσουμε την συνδεσμολογία του σχήματος προκειμένου να προσδιορίσουμε τα στοιχεία E και r της πηγής. Ρυθμίζουμε την μεταβλητή αντίσταση ώστε το κύκλωμα να διαρρέεται από συγκεκριμένη τιμή ρεύματος και μετράμε την πολική τάση της πηγής με την βοήθεια του βολτομέτρου.

Να γράψετε την σχέση που συνδέει την πολική τάση στους πόλους της πηγής με την ένταση του ρεύματος. Ποια είναι τα μεγέθη X και Y, επί των οποίων θα μπορούσατε να εφαρμόσετε την Μ.Ε.Τ.; Ποια είναι τα μεγέθη a και b;

Δ.2. Εκτελούμε $n = 9$ μετρήσεις της πολικής τάσης σε συνάρτηση με την ένταση. Οι μετρήσεις έχουν καταχωρηθεί στον πίνακα που υπάρχει στο Φύλλο Απαντήσεων. Να συμπληρώσετε με τα κατάλληλα δεδομένα **όλα** τα κελιά του πίνακα με αποσιωποιητικά.

Δ.3. Να εφαρμόσετε την Μ.Ε.Τ. για να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων a και b με τα αντίστοιχα σφάλματα. Από αυτές να βρείτε τα στοιχεία E και r της πηγής και να γράψετε την εξίσωση της ευθείας $V_\pi = f(I)$.

Δ.4. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση των μετρήσεων και την ευθεία που προέκυψε από την Μ.Ε.Τ.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Οριζόντια Βολή - Κυκλική Κίνηση

$x = v_0 t$	$v_x = v_0$	$f = \dfrac{1}{T}$	$\omega = \dfrac{\theta}{t}$	$a_k = \dfrac{v^2}{R}$
$y = \dfrac{1}{2} g t^2$	$v_y = gt$	$v = \dfrac{s}{t}$	$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	$F_k = m a_k$
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$	$f = \dfrac{N}{t}$	$v = \dfrac{2\pi R}{T}$	$v = \omega R$	$F_k = \dfrac{m v^2}{R}$

Ορμή

$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{F} = \dfrac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$	$\Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_{\text{ολ(αρχ)}} = \vec{p}_{\text{ολ(τελ)}}$

Κινητική Θεωρία των Αερίων

$pV = \text{σταθ. για } n, T = \text{σταθ.}$	$\frac{p}{T} = \text{σταθ. για } n, V = \text{σταθ.}$	$\frac{V}{T} = \text{σταθ. για } n, p = \text{σταθ.}$
Νόμος του Boyle	Νόμος του Charles	Νόμος του Gay-Lussac

$pV = nRT$	$p = \dfrac{\rho}{M} RT$	$p = \dfrac{1}{3}\dfrac{N m \bar{v^2}}{V}$	$\bar{K} = \dfrac{3}{2} kT$	$v_{\varepsilon\nu} = \sqrt{\bar{v^2}}$	$v_{\varepsilon\nu} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$

Θερμοδυναμική

$\Delta W = p\Delta V$	$W = nRT \ln \dfrac{V_2}{V_1}$	$W = \dfrac{p_\tau V_\tau - p_\alpha V_\alpha}{1-\gamma}$	$e = 1 - \dfrac{\lvert Q_c \rvert}{Q_h}$
$U = \dfrac{3}{2} nRT$	$pV^\gamma = \text{σταθ.}$	$e = \dfrac{W}{Q_h}$	$e = 1 - \dfrac{T_c}{T_h}$ (Carnot)
$Q = \Delta U + W$	$W = -\Delta U$		

Ηλεκτρικό Πεδίο

$F = k_c \dfrac{\lvert q_1 q_2 \rvert}{r^2}$	$E = k_c \dfrac{\lvert Q \rvert}{r^2}$	$U_\infty = 0, \quad V_\infty = 0$	$E = \dfrac{V}{d}$	$C = \dfrac{Q}{V}$
$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$	$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}}$	$U_{\mathrm{A}} = W_{\mathrm{A}\to\infty}$	$x = v_0 t \pm \dfrac{1}{2} a t^2$	$C = \epsilon\epsilon_0 \dfrac{S}{\ell}$
$E = \dfrac{F}{\lvert q \rvert}$	$V = \dfrac{U}{q}$	$U = k_c \dfrac{Qq}{r}$	$v = v_0 \pm at$	$U = \dfrac{1}{2} C V^2$
	$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = q(V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}})$	$V = k_c \dfrac{Q}{r}$	$a = \dfrac{qE}{m} = \dfrac{qV}{md}$	

Βαρυτικό Πεδίο

$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$	$V_{\mathrm{A}} = \dfrac{W_{\mathrm{A}\to\infty}}{m}$	$V = -G\dfrac{M}{r}$	$V = -G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}$
$\vec{g} = \dfrac{\vec{F}}{m}$	$U_\infty = 0$	$U = -G\dfrac{m_1 m_2}{r}$	$g_0 = G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}$
$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}}$	$V_\infty = 0$	$g = G\dfrac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}$	$v_{\text{διαφυγής}} = \sqrt{\dfrac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}}$
$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = m(V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}})$	$g = G\dfrac{M}{r^2}$		

Ηλεκτρικό Ρεύμα

$I = \dfrac{q}{t}$	$I = \dfrac{V}{R}$	$V = V_1 + V_2$	$\dfrac{1}{R_{\text{ολ}}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$	$P = I^2 R$	$\mathcal{E} = \dfrac{P}{I}$
$\Sigma I = 0$	$R = \rho \dfrac{\ell}{S}$	$R_{\text{ολ}} = R_1 + R_2$	$W = VIt$	$P = \dfrac{V^2}{R}$	$V_\pi = \mathcal{E} - Ir$
$\Sigma(\Delta V) = 0$	$\rho = \rho_0(1 + a\theta)$	$I = I_1 + I_2$	$P = \dfrac{W}{t}$	$Q = I^2 R t$	$I = \dfrac{\mathcal{E}}{R_{\text{ολ}}} = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$
$R = \dfrac{V}{I}$	$I = I_1 = I_2$	$V = V_1 = V_2$	$P = VI$	$\mathcal{E} = \dfrac{W}{q}$	

Φως

$c = \lambda f$ $E = hf$ $n = \frac{c_0}{c}$	$n = \frac{\lambda_0}{\lambda}$ $L = mvr$ $E_\alpha - E_\tau = hf$	$K = k_c \frac{e^2}{2r}$ $U = -k_c \frac{e^2}{r}$	$E = -k_c \frac{e^2}{2r}$ $r_n = n^2 r_1$	$E = \frac{E_1}{n^2}$ $\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV}$

Σταθερές

$R = 8,314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}$ $k = 1,38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$ $k_c = 9 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$	$G = 6,67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$ $M_\Gamma = 5,97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ $R_\Gamma = 6400\,\mathrm{km}$ $g_0 = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$	$e = 1,6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ $h = 6,63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ $E_1 = -13,6\,\mathrm{eV}$ $1\,\mathrm{eV} = 1,6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$ $1\,\mathrm{atm} = 1,013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$ $m_e = 9,1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ $m_p = 1,67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

Σύμβολα

x, y : Θέση	ω : Γωνιακή ταχύτητα	e : Συντελεστής απόδοσης	c : Ταχύτητα του φωτός
v : Ταχύτητα	W : Έργο	q, Q : Φορτίο	λ : Μήκος κύματος
a : Επιτάχυνση	K : Κινητική ενέργεια	V : Δυναμικό, Διαφορά δυναμικού	L : Στροφορμή
m, M : Μάζα	U : Δυναμική ενέργεια	C : Χωρητικότητα	E : Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου
F : Δύναμη	p : Ορμή	R : Αντίσταση	g : Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας
s : Διάστημα	ρ : Πυκνότητα	ρ : Ειδική αντίσταση	I : Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος
f : Συχνότητα	p : Πίεση	P : Ισχύς	
T : Περίοδος	Q : Θερμότητα	$\mathcal{E}$: ΗΕΔ πηγής	
θ : Γωνία	U : Εσωτερική ενέργεια		

Μονάδες Μέτρησης Μεγεθών

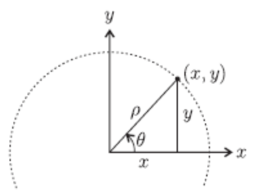
μέτρο, m χιλιόγραμμο, kg δευτερόλεπτο, s	νιούτον, N ακτίνιο, rad χέρτζ, Hz	τζούλ, J βάτ, W πασκάλ, Pa	κουλόμπ, C βόλτ, V φαράντ, F	Ωμ, Ω αμπέρ, A

Πολλαπλάσια - Υποπολλαπλάσια

10^{12}	$\rightarrow$	Tera (T)	10^{3}	$\rightarrow$	kilo (k)	10^{-6}	$\rightarrow$	micro (μ)
10^{9}	$\rightarrow$	Giga (G)	10^{-2}	$\rightarrow$	centi (c)	10^{-9}	$\rightarrow$	nano (n)
10^{6}	$\rightarrow$	Mega (M)	10^{-3}	$\rightarrow$	milli (m)	10^{-12}	$\rightarrow$	pico (p)

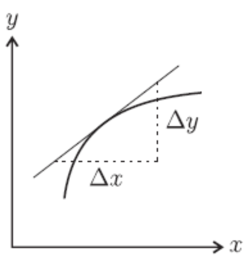
Μαθηματικό Βοήθημα

$\theta\,(^\circ)$	ημ θ	συν θ	εφ θ
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	$-$
180°	0	-1	0
270°	-1	0	$-$



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{ημ}\,\theta = \frac{y}{\rho},\ \text{συν}\,\theta = \frac{x}{\rho},\ \text{εφ}\,\theta = \frac{y}{x}$$



$$\text{κλίση} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Επώνυμο: ………………………………… Όνομα: …………………… Τάξη: …

Πατρώνυμο: ………………. Μητρώνυμο: …………………

Σχολείο: …………………..……….……….. Τηλέφωνο Σχολείου: ………………

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1ο ΘΕΜΑ (στο τετράδιο)

2ο ΘΕΜΑ

Β.1. $d_o =$……………, **Β.2.** (στο τετράδιο), **Β.3.** $t_{min} =$……………, **Β.4.** $d_{min} =$……………

3ο ΘΕΜΑ

Γ.1. $r_{max} =$……………, **Γ.2.** (στο τετράδιο), **Γ.3.** (στο τετράδιο) , **Γ.4.** (στο τετράδιο).

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

4ο ΘΕΜΑ

Δ.1. $V_\pi = f(I)$:…………………………………., $X =$……, $Y =$……, $a =$……, $b =$……

Δ.2.

α/α	$I(A)$	$V_\pi(V)$	$X(\dots\dots)$	$Y(\dots\dots)$	$X^2(\dots\dots)$	$X \cdot Y(\dots\dots)$	$Y - a - b \cdot X$ $(\dots\dots)$
1	1	22,64	…	…	…	…	…
2	2	21,24	…	…	…	…	…
3	3	19,29	…	…	…	…	…
4	4	17,48	…	…	…	…	…
5	5	15,45	…	…	…	…	…
6	6	12,77	…	…	…	…	…
7	7	10,78	…	…	…	…	…
8	8	8,57	…	…	…	…	…
9	9	6,63	…	…	…	…	…
		$\sum_{i=1}^{9}$	…	…	…	…	…

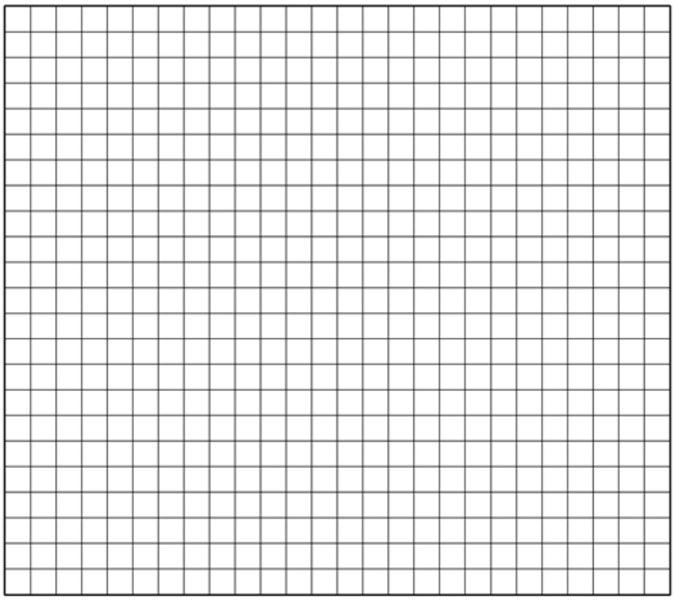
Δ.3. $a =$………….. $\pm$ ………..,

$b =$………….. $\pm$ ………..

$E =$………….. $\pm$ ………..

$r =$………….. $\pm$ ………..

Δ.4.



Γραφική παράσταση μετρήσεων και Μ.Ε.Τ.

Καλή επιτυχία!

Συνοπτικές Απαντήσεις

1ο ΘΕΜΑ

Α.1. Δίνονται δύο σημειακά φορτία πάνω στην ίδια ευθεία: στο σημείο B: $q_1 = +3\mu C$

στο σημείο Γ: $q_2 = -6\mu C$ με

$$B\Gamma = 9 \text{ cm}$$

Το δυναμικό σε ένα σημείο M του χώρου λόγω των δύο φορτίων είναι:

$$V_M = k\left(\frac{q_1}{MB} + \frac{q_2}{M\Gamma}\right)$$

δηλαδή εδώ:

$$V_M = k\left(\frac{3\cdot 10^{-6}C}{MB} - \frac{6\cdot 10^{-6}C}{M\Gamma}\right)$$

Θέλουμε $V_M = 0$.

Θέτουμε:

$$V = 0$$

Άρα:

$$k\left(\frac{3\cdot 10^{-6}C}{MB} - \frac{6\cdot 10^{-6}C}{M\Gamma}\right) = 0$$

Επειδή $k \neq 0$, προκύπτει:

$$\frac{3}{MB} = \frac{6}{M\Gamma}$$

ή

$$M\Gamma = 2MB$$

Άρα ζητούμε τα σημεία της ευθείας $B\Gamma$ για τα οποία η απόσταση από το Γ είναι διπλάσια της απόστασης από το B.

Περίπτωση 1: Το σημείο M είναι μεταξύ των B, Γ

Θέτουμε $M = \Delta$. Τότε:

$$B\Delta + \Delta\Gamma = 9cm$$

και επειδή

$$\Delta\Gamma = 2B\Delta$$

έχουμε:

$$B\Delta + 2B\Delta = 9cm \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3B\Delta = 9cm \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B\Delta = 3cm$$

οπότε

$$\Delta\Gamma = 6 \text{ cm}$$

Περίπτωση 2: Το σημείο M είναι στην προέκταση αριστερά του B

Θέτουμε $M = E$. Τότε:

$$E\Gamma = EB + 9cm$$

και από τη συνθήκη μηδενικού δυναμικού:

$$E\Gamma = 2EB$$

Άρα:

$$2EB = EB + 9cm \Rightarrow$$
$$\Rightarrow EB = 9cm$$

και επομένως

$$E\Gamma = 18cm$$

Υπάρχουν δύο σημεία της ευθείας $B\Gamma$ με δυναμικό μηδέν:

- το Δ, μεταξύ B και Γ, με
$$B\Delta = 3 \text{ cm}$$
- το E, στην προέκταση του B, με
$$BE = 9 \text{ cm}$$

Α.2. Δίνεται ότι:

$$AB = 4cm, A\Gamma = 8cm$$

Το δυναμικό στο A είναι:

$$V_A = \left(\frac{3\cdot10^{-6}C}{4\cdot10^{-2}m} - \frac{6\cdot10^{-6}C}{8\cdot10^{-2}m}\right)$$

Καθώς

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

προκύπτει:

$$V_A = 0$$

Α.3. Θεωρούμε σύστημα αξόνων Oxy, όπου το O είναι το μέσο του τμήματος ΔE, ο άξονας Ox ταυτίζεται με την ευθεία $B\Gamma$

Από τα προηγούμενα:

- Eκαι Δ απέχουν $12\ cm$, άρα το μέσο τους είναι το O, επομένως:
$$OE = O\Delta = 6cm$$

Στο σύστημα αυτό, σύμφωνα και με το σχήμα:

$$E(-6cm, 0), O(0,0), \Delta(6cm, 0)$$

Επίσης:

$$B(3cm, 0), \Gamma(12cm, 0)$$

γιατί $B\Delta = 3cm$ και $\Delta\Gamma = 6cm$.
Έστω τώρα τυχαίο σημείο $A(x, y)$ του επιπέδου με μηδενικό δυναμικό.
Τότε:

$$V_A = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ k\left(\frac{3\cdot 10^{-6}C}{AB} - \frac{6\cdot 10^{-6}C}{A\Gamma}\right) = 0 \text{ ή } A\Gamma = 2AB$$

Άρα:

$$AB = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$
$$A\Gamma = \sqrt{(x-12)^2 + y^2}$$

και η σχέση $A\Gamma = 2AB$ δίνει:

$$\sqrt{(x-12)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$(x-12)^2 + y^2 = 4[(x-3)^2 + y^2]$$

Αναπτύσσουμε:

$$x^2 - 24x + 144 + y^2 = 4(x^2 - 6x + 9 + y^2)$$
$$x^2 - 24x + 144 + y^2 = 4x^2 - 24x + 36 + 4y^2$$
$$108 = 3x^2 + 3y^2$$
$$36 = x^2 + y^2$$

δηλαδή:

$$\boxed{x^2 + y^2 = 36}$$

Γεωμετρική ερμηνεία
Η σχέση

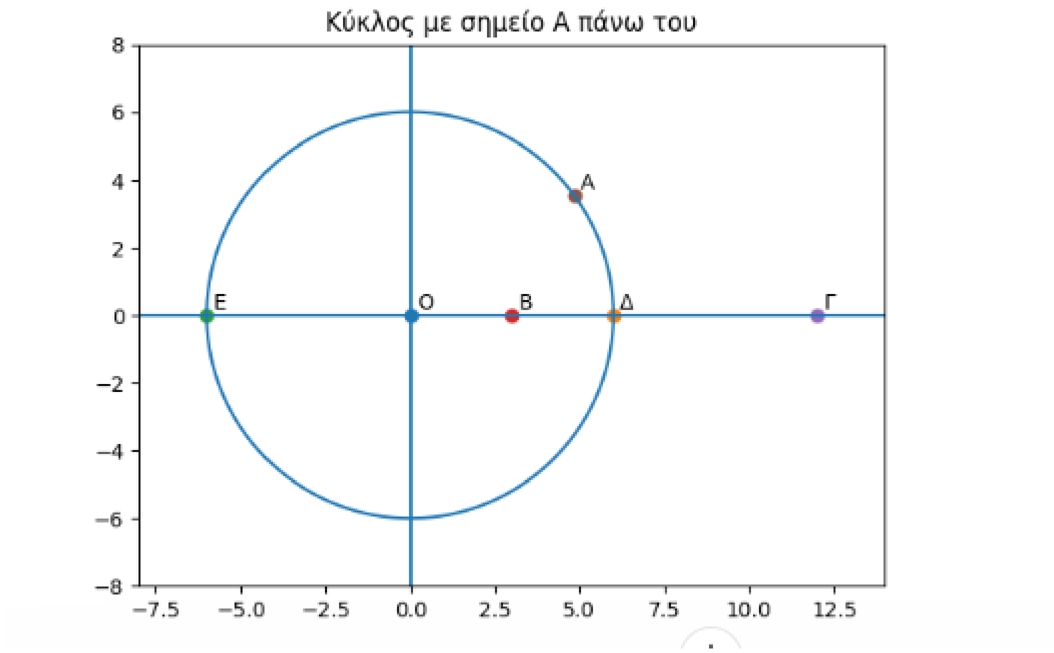
$$x^2 + y^2 = 36$$

ορίζει κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $R = 6cm$

Ποια σημεία του επιπέδου έχουν δυναμικό μηδέν
Αφού η συνθήκη $V = 0$ οδηγεί στην εξίσωση

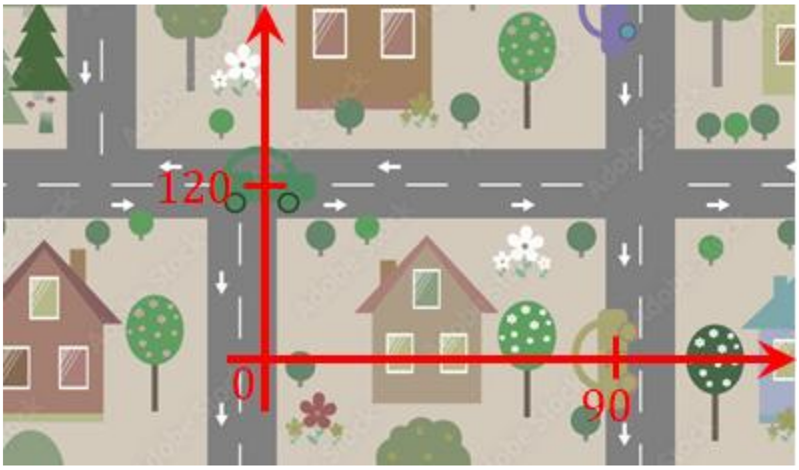
$$x^2 + y^2 = 36$$

συμπεραίνουμε ότι μηδενικό δυναμικό έχουν **όλα και μόνο** τα σημεία αυτού του κύκλου.



2ο ΘΕΜΑ

Β.1. Για να μελετήσουμε τις κινήσεις των δύο οχημάτων, θα κατασκευάζουμε ένα δισδιάστατο Σύστημα Αναφοράς, όπως στο ακόλουθο σχήμα:



(1 μόριο)

Η αρχική θέση του οχήματος Α είναι $(x_A\,, y_A) = (0\,, y_o) = (0\,, 120)$

(1 μόριο)

και του Β $(x_B\,, y_B) = (x_o\,, 0) = (90\,, 0)\ (S.I.)$.

(1 μόριο)

Συνεπώς, η ζητούμενη αρχική απόσταση είναι:

$$d_o = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_o = \sqrt{(0-90)^2 + (120-0)^2}\, m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_o = \sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 10)^2 + (3 \cdot 4 \cdot 10)^2}\, m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_o = \sqrt{(3 \cdot 10)^2 \cdot (3^2 + 4^2)}\, m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_o = 3 \cdot 10 \cdot \sqrt{5^2}\, m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_o = 3 \cdot 10 \cdot 5\, m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_o = 150 m$$

(3 μόρια)

Β.2. Εφόσον το όχημα Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, η θέση του κάθε στιγμή δίνεται από την σχέση:

$$A_t(\upsilon_A t\,, y_o) = A_t(8t\,, 120), \qquad (S.I.)$$

(2 μόρια)

Αντίστοιχα, για το Β είναι:

$$B_t(x_A\,, \upsilon_B t) = B_t(90\,, 6t), \qquad (S.I.)$$

(2 μόρια)

Δηλαδή

$$d = \sqrt{(8t-90)^2 + (120-6t)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{(64t^2 - 2 \cdot 8t \cdot 90 + 90^2) + (120^2 - 2 \cdot 120 \cdot 6t + 36t^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{64t^2 - 1.440t + 8.100 + 14.400 - 1.440t + 36t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{100t^2 - 2.880t + 22.500} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{100(t^2 - 28{,}8t + 225)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = 10\sqrt{t^2 - 28{,}8t + 225}\ (S.I.)$$

(2 μόρια)

Β.3. Από το προηγούμενο αποτέλεσμα προκύπτει:

$$d^2 = 100t^2 - 2.880t + 22.500$$

(1 μόριο)

Δηλαδή το τετράγωνο της απόστασης εκφράζεται ως δευτεροβάθμια συνάρτηση του χρόνου, με συντελεστές $\alpha = 100$, $\beta = -2.880$ και $\gamma = 22.500$.

(1 μόριο)

Αφού $\alpha > 0$, συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω,

(2 μόρια)

συνεπώς παρουσιάζει ελάχιστο για $t = \frac{-\beta}{2\alpha}$.

(2 μόρια)

Δηλαδή

$$t_{min} = \frac{2.880}{200} s \Rightarrow t_{min} = 14{,}4s$$

(1 μόριο)

Β.4. Από το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε:

$$d_{min} = 10\sqrt{14{,}4^2 - 28{,}8 \cdot 14{,}4 + 225}m \Rightarrow d_{min} = 10\sqrt{14{,}4(14{,}4 - 28{,}8) + 225}m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{min} = 10\sqrt{-14{,}4^2 + 225}m \Rightarrow d_{min} = 10\sqrt{15^2 - 14{,}4^2}m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{min} = 10\sqrt{(15 + 14{,}4)(15 - 14{,}4)}m \Rightarrow d_{min} = 10\sqrt{29{,}4 \cdot 0{,}6}m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{min} = 10\sqrt{17{,}64}m \Rightarrow d_{min} = 10\sqrt{\frac{1764}{100}}m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{min} = 10\sqrt{\frac{42^2}{10^2}}m \Rightarrow d_{min} = 10\frac{42}{10}m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{min} = 42m$$

(6 μόρια)

3ο ΘΕΜΑ

Γ.1. ΑΔΜΕ: $(U + K)_{στιγμιότυπο} = (U + K)_{μεγιστη\ αποσταση} \Rightarrow$

(3 μόρια)

$$\Rightarrow -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{r_{max}} + 0 \Rightarrow$$

(3 μόρια)

$$\Rightarrow -\frac{\left(6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)(5{,}97 \times 10^{24}\ kg)}{234621 \times 1{,}61 \times 10^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1328 \times 1{,}61 \times \frac{10^3}{3600}m}{s}\right)^2 =$$

$$= -\frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2)(5{,}97 \times 10^{24}\ kg)}{r_{max}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{max} = 454.000\ km$$

(1 μόριο)

Γ.2. Με βάση τις πληροφορίες που δίνονται, το Orion την ώρα του στιγμιοτύπου απείχε από τη Σελήνη 36.896 $μίλια$, έχοντας ήδη διανύσει 242.239 $μίλια$ από τη Γη (στην πραγματικότητα από το κέντρο της Γης), άρα η συνολική απόσταση που έπρεπε να διανύσει ήταν $36.896 + 242.239\, μίλια \cong 437.000\, km$ μικρότερη απόσταση δηλαδή από την απόσταση που υπολογίστηκε στο πρώτο ερώτημα.

(6 μόρια)

Γ.3. Η τροχιά δεν είναι τελείως ευθύγραμμη

(3 μόρια)

και επιπλέον δεν λήφθηκε υπόψη η βαρυτική έλξη της Σελήνης, η οποία έλκει το Orion προς τη μεριά της Σελήνης, μη αφήνοντάς το να απομακρυνθεί περισσότερο

(3 μόρια)

(στην πραγματικότητα το Orion χρησιμοποίησε μέρος αυτής της έλξης για να επιστρέψει στη Γη).

Γ.4. Το Orion δεν κατευθυνόταν προς τη Σελήνη, αλλά προς το σημείο στο οποίο θα βρισκόταν η Σελήνη όταν θα έφτανε το Orion σε απόσταση από τη Γη ίση με την ακτίνα της τροχιάς της Σελήνης. Στην εικόνα, το Orion κατευθύνεται ευθεία εμπρός, ενώ η Σελήνη κινείται προς τα αριστερά, ώστε να συναντηθούν σε μερικές ώρες.

(6 μόρια)

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

4ο ΘΕΜΑ

Δ.1. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι $V_\pi = E - I \cdot r$

(1 μόριο)

Δηλαδή $X = I$, $Y = V_\pi$, $a = E$ και $b = -r$

(2 μόρια)

Δ.2. Δίνεται ο συμπληρωμένος πίνακας:

α/α	$I(A)$	$V_\pi(V)$	$X(\text{A})$	$Y(\text{V})$	$X^2(\text{A}^2)$	$X \cdot Y(\text{A} \cdot \text{V})$	$Y - a - b \cdot X$ (V)
1	1	22,64	1	22,64	1	22,64	0,3544
2	2	21,24	2	21,24	4	42,48	0,0046
3	3	19,29	3	19,29	9	57,87	0,0326
4	4	17,48	4	17,48	16	69,92	0,1881
5	5	15,45	5	15,45	25	77,25	0,2178
6	6	12,77	6	12,77	36	76,62	0,0226
7	7	10,78	7	10,78	49	75,46	0,0060
8	8	8,57	8	8,57	64	68,56	0,0503
9	9	6,63	9	6,63	81	59,67	0,0103
		$\sum_{i=1}^{9} \ldots$	45	134,85	285	550,47	0,8900

(9 μόρια)

Δ.3. Εφαρμόζοντας του τύπους έχουμε:

$$D = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \Rightarrow D = 9 \cdot 285 - (45)^2 = 540$$

(1 μόριο)

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{D} \Rightarrow \alpha = \frac{285 \cdot 134{,}85 - 45 \cdot 550{,}47}{540} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \cong 25{,}30$$

(1 μόριο)

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{D} \Rightarrow b = \frac{9 \cdot 550{,}47 - 45 \cdot 134{,}85}{540} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \cong -2{,}06$$

(1 μόριο)

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - b \cdot x_i)^2}{n-2}} \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{\frac{0{,}8900}{7}} \Rightarrow \sigma_y \cong 0{,}36$$

(1 μόριο)

$$\delta\alpha = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{D}} \Rightarrow \delta\alpha \cong 0{,}36\sqrt{\frac{285}{540}} \Rightarrow \delta\alpha \cong 0{,}26$$

(1 μόριο)

$$\delta b = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{D}} \Rightarrow \delta b \cong 0{,}36\sqrt{\frac{9}{540}} \Rightarrow \delta b \cong 0{,}05$$

(1 μόριο)

Καταλήγουμε λοιπόν:

$$E \cong (25{,}30 \pm 0{,}26)\, V$$

και

$$r \cong (2{,}06 \pm 0{,}05)\, \Omega$$

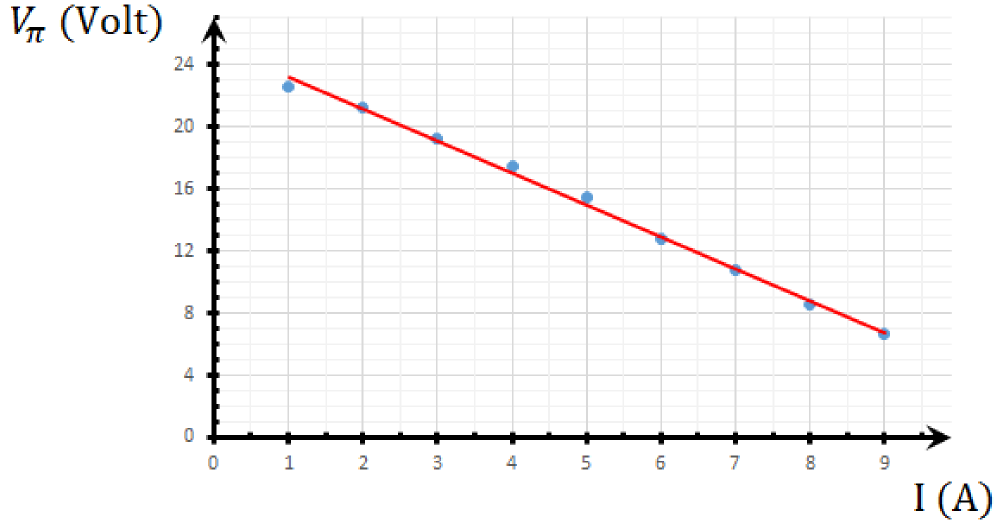
(1 μόριο)

Οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$V_\pi = 25{,}30 - 2{,}06 \cdot I \ \ (S.I.)$$

(1 μόριο)

Δ.4. Τα πειραματικά σημεία και η ευθεία της Μ.Ε.Τ. φαίνονται στο επόμενο σχήμα:



(5 μόρια)

Οδηγίες βαθμολόγησης

1ο ΘΕΜΑ
Α.1. 5 μόρια,
Α.2. 5 μόρια,
Α.3.1. 5 μόρια,
Α.3.2. 5 μόρια,
Α.3.3. 5 μόρια.

2ο ΘΕΜΑ
Β.1. 6 μόρια,
Β.2. 6 μόρια,
Β.3. 7 μόρια,
Β.4. 6 μόρια.

3ο ΘΕΜΑ
Γ.1. 7 μόρια,
Γ.2. 6 μόρια,
Γ.3. 6 μόρια,
Γ.4. 6 μόρια.

4ο ΘΕΜΑ: 25 μόρια
Δ.1. 3 μόρια, Αν η απάντηση είναι $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}$ αντί της ορθής $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{r}$, **αφαιρείται 1 μόριο**
Δ.2. 9 μόρια
Δ.3. 8 μόρια
Δ.4. 5 μόρια