ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Η αναλυτική λύση των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε τετράδιο ή σε φύλλα Α4 που θα σας δοθούν. Στον κατάλληλο χώρο του τετραδίου ή στην πρώτη σελίδα Α4 θα αναγράψετε τα ονομαστικά στοιχεία σας
2. Όλα τα ζητούμενα αριθμητικά αποτελέσματα πρέπει ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ να μεταφερθούν στο ***Φύλλο Απαντήσεων*** που θα βρείτε αμέσως μετά τις εκφωνήσεις και το τυπολόγιο.
3. Όπου ζητούνται γραφήματα θα σχεδιαστούν στους ειδικούς χώρους του ***Φύλλου Απαντήσεων***.
4. Στο τέλος της εξέτασης θα παραδώσετε το τετράδιο (ή τα φύλλα Α4) με τις αναλυτικές λύσεις σας ΜΑΖΙ με το Φύλλο Απαντήσεων.
5. Το Φύλλο Απαντήσεων θα συρραφεί στο τετράδιο (ή στα φύλλα Α4).
6. Τα ονομαστικά στοιχεία θα καλυφθούν με μαύρο αυτοκόλλητο.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1ο ΘΕΜΑ

Ένας φούρνος μικροκυμάτων λειτουργεί με Η/Μ ακτινοβολία συχνότητας $f = 2{,}450\ GHz$. Η ακτινοβολία μπορεί να ασκήσει ροπή σε πολωμένα μόρια (π.χ. σε μόρια νερού), αυξάνοντας έτσι την κινητική τους ενέργεια. Γι΄ αυτό η θέρμανση του φαγητού γίνεται καλύτερα αν αυτό φέρει υγρασία. Για λόγους προστασίας, ο θάλαμος του φούρνου φέρει μεταλλικό περίβλημα, ώστε να λειτουργεί ως *Κλωβός Faraday*, δηλαδή να μην επιτρέπει την διάδοση του Η/Μ πεδίου στον περιβάλλοντα χώρο. Με τον τρόπο αυτό αποτρέπεται η θέρμανση των κυττάρων των ανθρώπων ή άλλων ζωντανών οργανισμών που βρίσκονται στον ίδιο χώρο. Η ακτινοβολία ανακλάται στο εσωτερικό του φούρνου και συμβάλει με τον εαυτό της δημιουργώντας στάσιμα κύματα. Για πιο ομοιόμορφα αποτελέσματα, ο φούρνος φέρει περιστρεφόμενη βάση, ώστε κανένα σημείο του φαγητού να μην είναι μόνιμα σε σημεία απόσβεσης. Επειδή η μικροκυματική ακτινοβολία βρίσκεται εκτός του ορατού φάσματος, ο φούρνος φέρει στο εσωτερικό του κοινό λαμπτήρα, ώστε να καθίσταται ευχερής η παρατήρηση της λειτουργίας του.

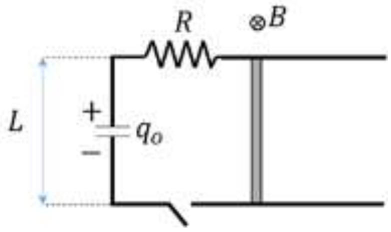
Α.1. Αφαιρούμε την περιστρεφόμενη βάση, τοποθετούμε μία πλάκα σοκολάτας στο εσωτερικό του και θέτουμε τον φούρνο σε λειτουργία. Μετά από λίγη ώρα παρατηρούμε περιοχές στην επιφάνεια της πλάκας που έχουν λιώσει, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους $d = 6{,}0\ cm$ (Πηγή: PGR Blog, Πανεπιστήμιο της Γλασκώβης). Να περιγράψετε και να εφαρμόσετε μία μέθοδο για τον πειραματικό υπολογισμό της ταχύτητας c του φωτός.

Α.2. Το γυαλί της πόρτας του φούρνου φέρει δικτυωτή μεταλλική επένδυση, με κυκλικά ανοίγματα διαμέτρου περίπου $1mm$, ώστε η επιβλαβής μικροκυματική ακτινοβολία να μην διαφεύγει στο περιβάλλον. Αν είναι γνωστό ότι το φως δεν μπορεί να περάσει από ανοίγματα που είναι μικρότερα του λ, να αποδείξετε ότι το εν λόγω πλέγμα παρέχει επαρκή ασφάλεια από την μικροκυματική ακτινοβολία, αλλά δεν εμποδίζει το φως του λαμπτήρα να φτάνει στα μάτια μας.

2ο ΘΕΜΑ

Β.1. Γνωρίζουμε ότι τα ηλεκτρόνια είναι κβαντομηχανικά σωματίδια, συνεπώς οι ατομικές κυκλικές τροχιές, ακτίνας $R_1 \cong 0{,}05\ nm$ και $\upsilon_1 \cong 10^6 m/s$, που προβλέπει το πρότυπο του Bohr αποτελούν μια εξαιρετικά χονδροειδή περιγραφή της συμπεριφοράς τους. Κατ΄ αντιστοιχία, μήπως είναι εξ ίσου λάθος να περιγράφουμε την κίνηση ενός ηλεκτρονίου στο εσωτερικό ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = \upsilon_1$ (όπως π.χ. σε ένα Κύκλοτρο με $R_2 \cong 10\ m$) ως κυκλική; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας σχέσεις αβεβαιότητας. Δίνεται $h/2\pi \cong 10^{-34} Js$, $m_e \cong 9 \cdot 10^{-31} kg$.

Β.2. Ιδανικός πυκνωτής χωρητικότητας C και αρχικού φορτίου q_o, συνδέεται μέσω ανοικτού διακόπτη με αντίσταση R η οποία βρίσκεται κατά μήκος ενός από δύο λείους, παράλληλους οδηγούς απείρου μήκους και αμελητέας ωμικής αντίστασης, που σχηματίζουν οριζόντιο επίπεδο και απέχουν μεταξύ τους κατά L. Πάνω στους οδηγούς τοποθετείται μεταλλική ράβδος μήκους L, μάζας m και αμελητέας ωμικής αντίστασης, με την διεύθυνσή της κάθετη στους οδηγούς (βλ. σχ.). Το σύστημα τοποθετείται εντός κατακόρυφου ομογενούς μαγνητικού πεδίου B.



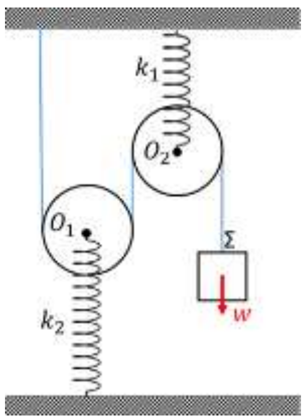
Β.2.1. Να περιγράψετε την κίνηση της ράβδου από την στιγμή που κλείνουμε τον διακόπτη (αιτιολογώντας την απάντησή σας) και να υπολογίσετε την οριακή της ταχύτητα υ_{op}.

Β.2.2. Πόση θερμότητα Q εκλύεται στην αντίσταση R μέχρις ότου η ράβδος να αποκτήσει την οριακή της ταχύτητα;

Υπενθυμίζονται οι σχέσεις $C = \frac{q}{V}$ και $E = \frac{q^2}{2C}$, όπου C η χωρητικότητα του πυκνωτή, q το φορτίο του, V η τάση που επικρατεί μεταξύ των οπλισμών του και E η ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών του.

3ο ΘΕΜΑ

Στο σχήμα φαίνεται ένα σύστημα που αποτελείται από δύο όμοιες τροχαλίες, έστω Ο1 και Ο2, αμελητέων μαζών, δύο ιδανικά ελατήρια, με σταθερές έστω K_1, K_2, ένα άκρο των οποίων είναι ακλόνητα στερεωμένο στην οροφή και στο έδαφος αντίστοιχα, ενώ το άλλο άκρο κάθε ενός είναι προσδεδεμένο στο κέντρο μίας τροχαλίας. Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό και στο ελεύθερο άκρο του Σ είναι δεμένο και ισορροπεί ένα σώμα βάρους w. Το νήμα συνδέει και καθορίζει την κινητική κατάσταση του συστήματος. Αρχικά, τα ελατήρια είναι παραμορφωμένα κατά x_{o1} και x_{o2} αντίστοιχα. Μετατοπίζουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά x, οπότε τα ελατήρια υφίστανται πρόσθετες επιμηκύνσεις x_1 και x_2 αντίστοιχα. Αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο.



Γ.1. Να αποδείξετε ότι ισχύει $x = 2(x_1 + x_2)$.

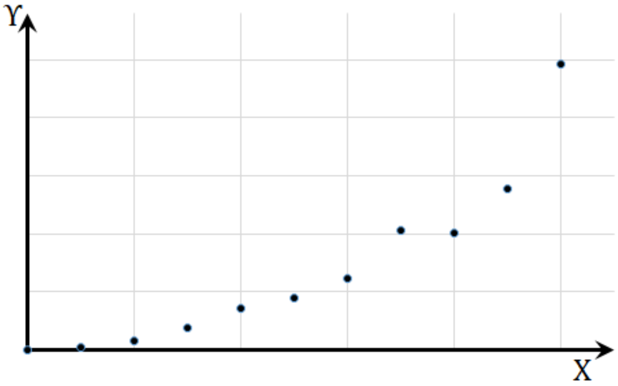
Γ.2. Να αποδείξετε ότι η περίοδος T ταλάντωσης του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{4\frac{w}{g}\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}}$$

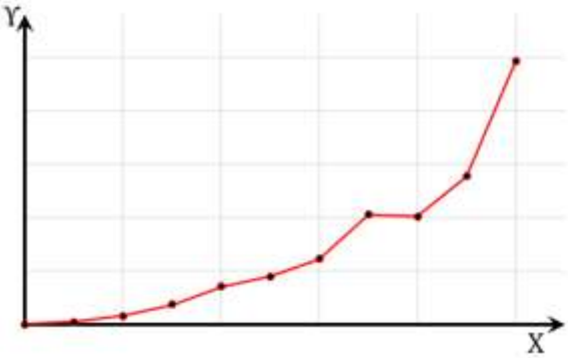
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

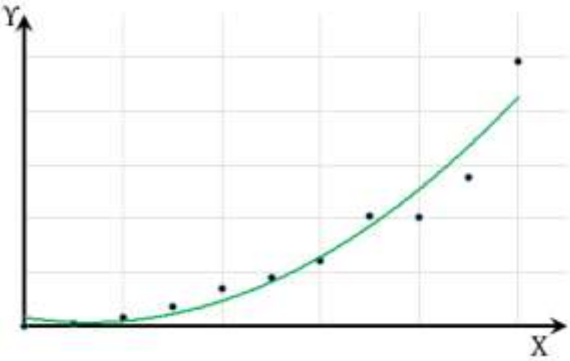
Η Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων (Μ.Ε.Τ.) είναι μια μαθηματική διαδικασία που μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την ποσοτική σχέση μεταξύ δύο φυσικών ποσοτήτων, έστω X και Y.



Για παράδειγμα, εκτελούμε ένα πείραμα στο οποίο μεταβάλουμε τις τιμές του μεγέθους X (έστω 11 τιμές) και μετράμε τις αντίστοιχες τιμές του Y. Κατόπιν απεικονίζουμε τις μετρήσεις σε γραφική παράσταση, όπως στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι, λόγω σφαλμάτων, τα σημεία δεν βρίσκονται κατά μήκος μιας ομαλής καμπύλης.



Προκειμένου να δούμε ποια τιμή θα έπαιρνε το μέγεθος Y για κάποια τιμή του X διαφορετική των μετρήσεων, το **χειρότερο** που θα μπορούσαμε να κάνουμε θα ήταν να ενώσουμε τα σημεία με τεθλασμένη γραμμή. Αυτό θα σήμαινε ότι η σχέση των δύο μεγεθών είναι γραμμική, δηλαδή της μορφής $Y = m + nX$, με τους συντελεστές m και n να λαμβάνουν διαφορετικές τιμές για κάθε ζευγάρι διαδοχικών τιμών του X. Σίγουρα, αυτή δεν είναι η κατάσταση που ισχύει στην Φύση!



Το **καλύτερο** που θα μπορούσαμε να κάνουμε θα ήταν να εφαρμόσουμε την Μ.Ε.Τ., ώστε να βρούμε μια ομαλή γραμμή (η μορφή της οποίας, στην γενική περίπτωση, είναι καμπύλη), από την οποία όλα τα πειραματικά προσδιορισμένα σημεία απέχουν ελάχιστες αποστάσεις, μια καμπύλη δηλαδή που αποτελεί την καλύτερη (βέλτιστη) προσέγγιση όλων των μετρήσεων *ταυτοχρόνως*. Όπως φαίνεται από το σχήμα, ενδέχεται ούτε ένα σημείο να βρίσκεται πάνω στην καμπύλη. Όμως αυτό, δεν αναιρεί το γεγονός ότι η συγκεκριμένη γραμμή είναι η καλύτερη προσέγγιση.

Υπάρχουν παραλλαγές της Μ.Ε.Τ. που προσεγγίζουν καλύτερα τη νοητή καμπύλη που (φαίνεται ότι) σχηματίζουν τα πειραματικά σημεία. Αυτές περιλαμβάνουν ευθεία γραμμή, πολυωνυμική, εκθετική και άλλες.

Στην συνέχεια της άσκησης αυτής, θα περιοριστούμε σε γραμμική εξάρτηση, δηλαδή της μορφής $Y = \alpha + \beta X$. Η Μ.Ε.Τ. μάς επιτρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές των συντελεστών α (σταθερός όρος) και β (συντελεστής του πρωτοβάθμιου όρου), μαζί με τα σφάλματά τους $\delta\alpha$ και $\delta\beta$ αντίστοιχα.

Αν λοιπόν έχουμε n μετρήσεις (στο παράδειγμά μας είναι $n = 11$), ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{D} \qquad \beta = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{D} \qquad D = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$$\delta\alpha = \sigma_y\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{D}} \qquad \delta\beta = \sigma_y\sqrt{\frac{n}{D}} \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - \beta\cdot x_i)^2}{n-2}}$$

όπου το σύμβολο

$$\sum_{i=1}^{n}$$

είναι μια συντομογραφία της άθροισης των n τιμών. Για παράδειγμα:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Αν και η επιλογή να μελετήσουμε μόνο την γραμμική περίπτωση μοιάζει εξαιρετικά περιοριστική, αυτό δεν ισχύει στην πραγματικότητα και μπορούμε να εφαρμόσουμε την Μ.Ε.Τ. σε πολλές περιπτώσεις, οι οποίες, με την πρώτη ματιά, δεν παρουσιάζουν γραμμικότητα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης χωρίς αρχική ταχύτητα, η μετατόπιση x είναι ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου t: $x = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$ και η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι παραβολή. Αν όμως θεωρήσουμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή το t^2 αντί του t, και τοποθετήσουμε αυτές τις τιμές στον οριζόντιο άξονα, τότε η γραφική παράσταση γίνεται ευθεία και η Μ.Ε.Τ. μπορεί να εφαρμοστεί άνετα!

Δ.1. Έστω σύστημα που εκτελεί ταλάντωση με απόσβεση. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι καθώς η τιμή της σταθεράς απόσβεσης b μεγαλώνει, "η περίοδος T παρουσιάζει μια μικρή αύξηση". Κατά συνέπεια, η συχνότητα f μειώνεται. Συγκεκριμένα, ισχύει:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Ας θεωρήσουμε ότι το ταλαντούμενο σύστημα αποτελείται από σώμα μικρών διαστάσεων και ελατήριο αμελητέας μάζας. Θα πραγματοποιήσουμε ένα πείραμα για τον προσδιορισμό της σταθεράς απόσβεσης. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ελατήρια που διαθέτουμε στο εργαστήριο, με γνωστές τιμές της σταθεράς k, στα οποία θα συνδέσουμε διαδοχικά στερεό σώμα μικρών διαστάσεων, θα θέσουμε το σύστημα σε ταλάντωση, θα μετρήσουμε την περίοδό του και θα υπολογίσουμε την συχνότητά του.

Να μετατρέψετε την σχέση που συνδέει την συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος με την σταθερά απόσβεσης σε μορφή κατάλληλη ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η Μ.Ε.Τ. Στο Φύλλο Απαντήσεων να γράψετε την σχέση στην οποία καταλήξατε. Ποια είναι τα μεγέθη X και Y; Ποια είναι τα μεγέθη a και b;

Δ.2. Εκτελούμε $n = 9$ μετρήσεις της περιόδου ταλάντωσης σε συνάρτηση με την τιμή της σταθεράς επαναφοράς. Οι μετρήσεις έχουν καταχωρηθεί στον πίνακα που υπάρχει στο Φύλλο Απαντήσεων. Να συμπληρώσετε με τα κατάλληλα δεδομένα **όλα** τα κελιά του πίνακα με αποσιωποιητικά.

Δ.3. Να εφαρμόσετε την Μ.Ε.Τ. για να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων a και b με τα αντίστοιχα σφάλματα. Από αυτές να προσδιορίσετε την μάζα m του σώματος και τιμή της σταθεράς απόσβεσης b (δεν ζητείται να προσδιορίσετε τα σφάλματά τους) και να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που προκύπτει από την Μ.Ε.Τ.

Δ.4. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση των μετρήσεων και την ευθεία που προέκυψε από την Μ.Ε.Τ.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΡΟΥΣΕΙΣ-ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2$$

$$v_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$$
$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1$$
$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$
$$T_{\text{ολ}} = \mu N$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$
$$p = mv$$
$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a_\kappa = \frac{v^2}{r}$$
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$T = \frac{1}{f}$$
$$v_{\text{cm}} = \omega R$$
$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_{\text{cm}} = a_{\gamma\omega\nu}R$$
$$\tau = F\ell = Fd$$
$$L = mvr$$
$$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL}{dt}$$

a : Επιτάχυνση	K : Κινητική ενέργεια	s : Τόξο ή Διάστημα	$\alpha_{\gamma\omega\nu}$: Γωνιακή επιτάχυνση
E : Ενέργεια	L : Στροφορμή	T : Περίοδος	μ : Συντελεστής τριβής
f : Συχνότητα	ℓ, d : Μήκος ή Απόσταση	V : Όγκος	θ : Γωνία
F : Δύναμη	m : Μάζα	v : Ταχύτητα	ρ : Πυκνότητα
$T_{\text{ολ}}$: Τριβή ολίσθησης	p : Ορμή	W : Έργο	τ : Ροπή
N : Κάθετη δύναμη	R, r : Ακτίνα	x, y : Θέση	ω : Γωνιακή ταχύτητα
		Δx : Μετατόπιση	

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

$$x = A\,\eta\mu(\omega t + \phi)$$
$$v = \omega A\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi)$$
$$a = -\omega^2 A\,\eta\mu(\omega t + \phi)$$
$$a = -\omega^2 x$$
$$F = -Dx$$
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$D = m\omega^2$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$
$$U = \frac{1}{2}Dx^2$$
$$F = -bv$$
$$A = A_0 e^{-\Lambda t}$$

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \sigma\tau\alpha\theta.$$
$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$v = \lambda f$$
$$y = A\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$r_1 - r_2 = N\lambda,\ N \in \mathbb{Z}$$
$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2},\ N \in \mathbb{Z}$$
$$y = 2A\,\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\,\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$$
$$x_K = 0, \frac{\lambda}{2}, \dots, N\frac{\lambda}{2}$$
$$x_\Delta = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \dots, (2N+1)\frac{\lambda}{4}$$

A : Πλάτος	ω : Γωνιακή συχνότητα	K ή k : Σταθερά ελατηρίου	λ : Μήκος κύματος
x : Θέση	ϕ : Αρχική φάση	D : Σταθερά επαναφοράς	U : Δυναμική ενέργεια
v : Ταχύτητα	f : Συχνότητα	T : Περίοδος	y : Απομάκρυνση
a : Επιτάχυνση	f_0 : Ιδιοσυχνότητα	b : Σταθερά απόσβεσης	

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ - ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ - ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΑ

$$E = \frac{F}{q}$$
$$I = \frac{dq}{dt}$$
$$I = \frac{V}{R}$$
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{ολ}}}$$
$$V = \frac{W}{q}$$
$$R_{\text{ολ}} = R_1 + R_2 + R_3$$
$$\frac{1}{R_{\text{ολ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$
$$R = \rho\frac{\ell}{A}$$
$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\ell}{r^2}\,\eta\mu\,\theta$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}$$
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi I}{r}$$
$$\sum B\Delta\ell\,\sigma\upsilon\nu\,\theta = \mu_0 I_{\varepsilon\gamma\kappa}$$
$$B = \mu_0 I n$$
$$n = \frac{N}{\ell}$$
$$\Phi_B = BA\,\sigma\upsilon\nu\,\theta$$
$$F = B|q|v\,\eta\mu\,\phi$$
$$R = \frac{mv}{|q|B}$$
$$T = \frac{2\pi m}{|q|B}$$
$$v = \frac{E}{B}$$

$$F = BI\ell\,\eta\mu\,\phi$$
$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{a}\ell$$
$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = Bv\ell$$
$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = \frac{1}{2}B\omega\ell^2$$
$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$
$$\mathcal{E}_{\alpha\upsilon\tau} = -L\frac{di}{dt}$$
$$L = \mu\mu_0\frac{N^2}{\ell}A$$
$$U = \frac{1}{2}LI^2$$
$$\frac{E}{B} = c$$

$$E = E_{\max}\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$
$$B = B_{\max}\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$
$$v = V\,\eta\mu\,\omega t$$
$$V = NB\omega A$$
$$i = I\,\eta\mu\,\omega t$$
$$i = \frac{v}{R}$$
$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$
$$V_{\varepsilon\nu} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$
$$p = vi$$
$$P = \frac{W}{T}$$

A : Εμβαδόν
B : Μαγνητικό πεδίο
E : Ηλεκτρικό πεδίο, ΗΕΔ
$\mathcal{E}$: ΗΕΔ
$\mathcal{E}_{\text{επ.}}$: ΗΕΔ από επαγωγή
$\mathcal{E}_{\text{αυτ.}}$: ΗΕΔ από αυτεπαγωγή
L : Συντελεστής αυτεπαγωγής
I : Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος

V : Διαφορά δυναμικού
ℓ, d, a : Μήκος ή Απόσταση
U : Ενέργεια Μαγνητικού πεδίου
q : Ηλεκτρικό φορτίο
R : Αντίσταση
W : Έργο
$R_{\text{ολ}}$: Ολική αντίσταση
ρ : Ειδική αντίσταση
F : Δύναμη
T : Περίοδος

q : Ηλεκτρικό φορτίο
r : Ακτίνα ή Απόσταση
n : Αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους
N : Αριθμός σπειρών
v : Ταχύτητα
Φ_B : Μαγνητική ροή
ϕ, θ : γωνία
μ : Μαγνητική διαπερατότητα
c : Ταχύτητα του φωτός

v : Στιγμιαία τάση
V : Πλάτος τάσης
i : Στιγμιαία ένταση
I : Πλάτος έντασης
$I_{\text{εν}}$: Ενεργός ένταση
$V_{\text{εν}}$: Ενεργός τάση
P : Μέση ισχύς
p : Στιγμιαία ισχύς
R : Αντίσταση
W : Ενέργεια ηλ. ρεύματος
Q : Θερμότητα

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

$\lambda_{\max} T = \text{σταθερό}$
$c = \lambda f$
$E = hf = pc$

$p = \dfrac{h}{\lambda}$
$K = hf - \phi$

$\lambda - \lambda' = \dfrac{h}{mc}(1 - \text{συν}\,\varphi)$
$\Delta p_x \Delta x \geq \dfrac{h}{2\pi}$

$\Delta E \Delta t \geq \dfrac{h}{2\pi}$
$\sum |\Psi|^2 \, dV = 1$

T : Θερμοκρασία
E : Ενέργεια
p : Ορμή

c : Ταχύτητα φωτός
f : Συχνότητα
x : Θέση

λ : Μήκος κύματος
φ : Γωνία
t : Χρόνος

ϕ : Έργο εξαγωγής
V : Όγκος
Ψ : Κυματοσυνάρτηση

Πολλαπλάσια - Υποπολλαπλάσια

$10^{12} \rightarrow$ Tera (T)
$10^{9} \rightarrow$ Giga (G)
$10^{6} \rightarrow$ Mega (M)

$10^{3} \rightarrow$ kilo (k)
$10^{-2} \rightarrow$ centi (c)
$10^{-3} \rightarrow$ milli (m)

$10^{-6} \rightarrow$ micro (μ)
$10^{-9} \rightarrow$ nano (n)
$10^{-12} \rightarrow$ pico (p)

Σταθερές

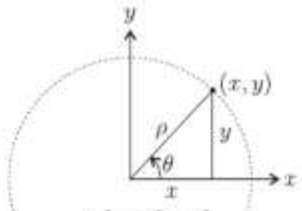
Μάζα Πρωτονίου
$m_p = 1,67 \times 10^{-27}\ \text{kg}$
Μάζα Νετρονίου
$m_n = 1,67 \times 10^{-27}\ \text{kg}$
Μάζα Ηλεκτρονίου
$m_e = 9,11 \times 10^{-31}\ \text{kg}$
Απόλυτη τιμή φορτίου ηλεκτρονίου
$e = 1,6 \times 10^{-19}\ \text{C}$

Ηλεκτρονιοβόλτ
$1\ \text{eV} = 1,6 \times 10^{-19}\ \text{J}$
Ταχύτητα του φωτός
$c = 3 \times 10^{8}\ \text{m/s}$
Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης
$g_0 = 9,8\ \text{m/s}^2$
Ηλεκτρική Σταθερά
$k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^{9}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$

Σταθερά της Παγκόσμιας Έλξης
$G = 6,67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
Μαγνητική διαπερατότητα του κενού
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A}$
Σταθερά του Planck
$h = 6,63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$
$h = 4,14 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}$
$hc = 12,42 \times 10^{-7}\ \text{eV} \cdot \text{m}$
$hc = 1242\ \text{eV} \cdot \text{nm} \simeq 1200\ \text{eV} \cdot \text{nm}$

Μαθηματικό Βοήθημα

θ (°)	ημ θ	συν θ	εφ θ
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
37°	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
53°	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	—



$\rho^2 = x^2 + y^2$
$\text{ημ}\,\theta = \dfrac{y}{\rho},\ \text{συν}\,\theta = \dfrac{x}{\rho},\ \text{εφ}\,\theta = \dfrac{y}{x}$

Εμβαδόν Παραλληλογράμμου : $A = \beta v$
Περίμετρος Κύκλου : $C = 2\pi r$
Εμβαδόν Κύκλου : $A = \pi r^2$
Εμβαδόν Σφαίρας : $A = 4\pi r^2$
Όγκος Σφαίρας : $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$
Μήκος τόξου κύκλου : $s = \theta r$
$\text{ημ}\,A + \text{ημ}\,B = 2\,\text{συν}\dfrac{A-B}{2}\,\text{ημ}\dfrac{A+B}{2}$

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Επώνυμο: ………………………………. Όνομα: …………………… Τάξη: …

Πατρώνυμο: ………………. Μητρώνυμο: …………………

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1ο ΘΕΜΑ
Α.1. (Περιγραφή στο τετράδιο) $c =$……………… , **Α.2.** (στο τετράδιο)

2ο ΘΕΜΑ
Β.1. (στο τετράδιο)
Β.2.1. Η κίνηση της ράβδου είναι ………………………………………………………...

επειδή …………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………....

………………………………………………………………………………………....

$\upsilon_{o\rho} =$…………………………

Β.2.2. $Q =$…………………………

3ο ΘΕΜΑ
Γ.1. (στο τετράδιο), **Γ.2.** (στο τετράδιο)

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

4ο ΘΕΜΑ

Δ.1. $\dots\dots\dots = f(k) =$…………………………………, $X =$……, $Y =$……, $\alpha =$……, $\beta =$……

Δ.2.

α/α	k (N/m)	T (s)	$X(\dots\dots)$	$Y(\dots\dots)$	$X^2(\dots\dots)$	$X\cdot Y(\dots\dots)$	$Y-\alpha-\beta\cdot X$ $(\dots\dots)$
1	50	0,288	…	…	…	…	…
2	80	0,226	…	…	…	…	…
3	110	0,191	…	…	…	…	…
4	140	0,170	…	…	…	…	…
5	170	0,154	…	…	…	…	…
6	200	0,141	…	…	…	…	…

7	230	0,131	…	…	…	…	…
8	260	0,123	…	…	…	…	…
9	290	0,117	…	…	…	…	…
		$\sum_{i=1}^{9}$	…	…	…	…	…

Δ.3. $a =$………….. $\pm$ ………..,

$\beta =$………….. $\pm$ ………..

$m =$…………..

$b =$…………..

Δ.4.

Γραφική παράσταση μετρήσεων και Μ.Ε.Τ.

Καλή επιτυχία!

Συνοπτικές Απαντήσεις

1ο ΘΕΜΑ

Α.1. Οι περιοχές όπου έχει λιώσει η σοκολάτα είναι διαδοχικά σημεία ενίσχυσης, συνεπώς η απόστασή τους ισούται με $\lambda/2$.
Ισχύει λοιπόν:

$$d = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2d \Rightarrow \lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-1}\, m$$

Από την θεμελιώδη κυματική εξίσωση έχουμε:

$$c = \lambda \cdot f \Rightarrow c = 1{,}2 \cdot 10^{-1}\, m \cdot 2{,}450 \cdot 10^{9}\, Hz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 2{,}94 \cdot 10^{8}\, m/s$$

Α.2. Στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι το μήκος κύματος της μικροκυματικής ακτινοβολίας είναι $\lambda = 12cm$, δηλαδή μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερο από την μέση διάμετρο των οπών του μεταλλικού πλέγματος της πόρτας. Πράγματι λοιπόν, η ακτινοβολία αυτή δεν μπορεί να διαφύγει εκτός του φούρνου.
Αντιθέτως, το μήκος κύματος του ορατού φωτός κυμαίνεται (περίπου) από $400nm$ μέχρι $700nm$, συνεπώς, το φως του λαμπτήρα μπορεί να περάσει μέσα από τα ανοίγματα επιτρέποντας την παρατήρηση στο εσωτερικό του φούρνου.

2ο ΘΕΜΑ

Β.1. Για το ατομικό ηλεκτρόνιο ας ξεκινήσουμε την ανάλυσή μας υποθέτοντας αβεβαιότητα θέσης $\Delta x_1 = R_1/10 = 0{,}005\, nm$, η οποία δεν είναι εξαιρετική, αλλά σε πρώτη προσέγγιση ίσως μπορεί να κριθεί αποδεκτή.

Η αντίστοιχη αβεβαιότητα ταχύτητας θα είναι ίση προς:

$$\Delta\upsilon_1 = \frac{\frac{h}{2\pi}}{m_e \Delta x_1} \Rightarrow \Delta\upsilon_1 = \frac{10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}005 \cdot 10^{-9}} \frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\upsilon_1 \cong 2 \cdot 10^{7}\, \frac{m}{s}$$

Δηλαδή η αβεβαιότητα της ταχύτητας είναι μία τάξη μεγέθους *μεγαλύτερη* της τιμής της!

Με παρόμοιους υπολογισμούς, προκύπτει ότι αν προσπαθήσουμε να κάνουμε την αβεβαιότητα στην θέση καλύτερη από απλώς "αποδεκτή", θα έχουμε πολύ χειρότερη κατάσταση ως προς την ταχύτητα.

Αν, αντιστρόφως, καταφέρουμε να μειώσουμε την αβεβαιότητα στην ταχύτητα, για παράδειγμα να την κάνουμε

$$\Delta\upsilon'_1 = 10^{5}\, \frac{m}{s}$$

(δηλαδή όχι και σπουδαία βελτίωση), θα έχουμε αβεβαιότητα ως προς την θέση:

$$\Delta x'_1 \cong 10^{-9} m$$

δηλαδή δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη της ακτίνας. Είναι λοιπόν ξεκάθαρο πως η περιγραφή της κίνησης ενός ατομικού ηλεκτρονίου ως κυκλική είναι εξαιρετικά χονδροειδής.

Στην περίπτωση που ένα ηλεκτρόνιο εκτελεί κυκλική κίνηση εντός του μαγνητικού πεδίου, όπως περιγράφεται στην εκφώνηση, θα ξεκινήσουμε και πάλι θεωρώντας αβεβαιότητα θέσης ίση με το $1/10$ της ακτίνας, δηλαδή:

$$\Delta x_2 = \frac{R_2}{10} = 1m$$

τότε

$$\Delta\upsilon_2 = \frac{\frac{h}{2\pi}}{m_e \Delta x_2} \Rightarrow \Delta\upsilon_2 = \frac{10^{-34}}{9\cdot 10^{-31}\cdot 1}\frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\upsilon_2 \cong 10^{-4}\frac{m}{s}$$

Δηλαδή η αβεβαιότητα είναι 10 τάξεις μεγέθους *μικρότερη* της τιμής.

Φυσικά αβεβαιότητα θέσης ενός μέτρου στα δέκα δεν είναι αμελητέα. Όμως, ακόμη κι αν περιορίσουμε την αβεβαιότητα θέσης σε τιμή $\Delta x'_2 = R_2/10000 = 0{,}001m$ (δηλαδή $1mm$ στα $10m$, που είναι κυριολεκτικά αμελητέο), θα έχουμε

$$\Delta\upsilon'_2 = \frac{\frac{h}{2\pi}}{m_e \Delta x_2} \Rightarrow \Delta\upsilon'_2 = \frac{10^{-34}}{9\cdot 10^{-31}\cdot 0{,}001}\frac{m}{s} \Rightarrow$$

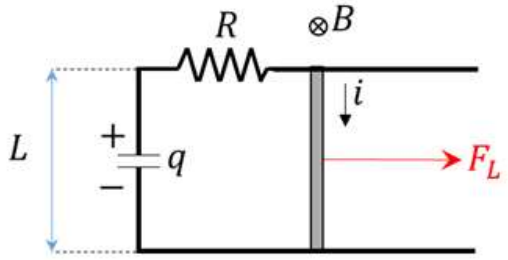
$$\Rightarrow \Delta\upsilon_1 \cong 10^{-1}\frac{m}{s}$$

δηλαδή και πάλι αβεβαιότητα ταχύτητας μικρότερη κατά 7 τάξεις μεγέθους από την τιμή.

Στην περίπτωση αυτή λοιπόν έχουμε κάθε δικαίωμα να περιγράψουμε την κίνηση του σωματιδίου ως κυκλική.

Συνεπώς, ο κβαντικός χαρακτήρας της φύσης δεν αναδύεται όταν έχουμε να κάνουμε με σωματίδια, αλλά όταν σωματίδια κινούνται σε μικροσκοπικές κλίμακες.

Β.2.1. Μόλις δημιουργηθεί κλειστό κύκλωμα αρχίζει η εκφόρτιση του πυκνωτή δια μέσου της αντίστασης και της ράβδου, δηλαδή το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα στιγμιαίας έντασης έστω i.
Η ράβδος δέχεται δύναμη Laplace, όπως στο σχήμα (στο οποίο εικονίζεται το κύκλωμα όταν το φορτίο του πυκνωτή έχει μειωθεί σε τιμή q.



Για την ράβδο ισχύει:

$$\Sigma F = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_L = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow BiL = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{BiL}{m}$$

Από την σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας θα μηδενιστεί, (δηλαδή η ταχύτητα θα αποκτήσει την οριακή της τιμή), όταν μηδενιστεί η ένταση του ρεύματος.
Επίσης, από την σχέση αυτή προκύπτει:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{BL}{m}i \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{BL}{m}\left(-\frac{dq}{dt}\right)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Το αρνητικό πρόσημο προκύπτει από το γεγονός ότι το φορτίο του πυκνωτή *μειώνεται*, άρα $\frac{dq}{dt} < 0$.

Καταλήγουμε λοιπόν στην σχέση:

$$dv = -\frac{BL}{m}dq \Rightarrow v - v_{\alpha\rho\chi} = -\frac{BL}{m}(q - q_o)$$

$$\Rightarrow v - v_{\alpha\rho\chi} = \frac{BL}{m}(q_o - q)$$

Όμως $v_{\alpha\rho\chi} = 0$, συνεπώς:

$$v = \frac{BL}{m}(q_o - q)$$

Για $v = v_{o\rho}$, έχουμε:

$$v_{o\rho} = \frac{BL}{m}(q_o - q_{o\rho})$$

όπου με $q_{o\rho}$ συμβολίζουμε το φορτίο που απομένει στον πυκνωτή όταν η ταχύτητα της ράβδου αποκτήσει την οριακή της τιμή, δηλαδή όταν μηδενιστεί το ρεύμα στο κύκλωμα.
Εφαρμόζοντας 2^o Κ.Κ. προκύπτει:

$$v_C - iR - E_{\varepsilon\pi} = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} - iR - BvL = 0 \Rightarrow$$

$$i = \frac{\frac{q}{C} - BvL}{R}$$

Για $i = 0$ προκύπτει:

$$0 = \frac{\frac{q_{o\rho}}{C} - B\upsilon_{o\rho}L}{R} \Rightarrow \frac{q_{o\rho}}{C} - B\upsilon_{o\rho}L = 0 \Rightarrow q_{o\rho} = CB\upsilon_{o\rho}L$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση της $\upsilon_{o\rho}$ έχουμε:

$$\upsilon_{o\rho} = \frac{BL}{m}\left(q_o - CB\upsilon_{o\rho}L\right) \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = \frac{BL}{m}q_o - \frac{C(BL)^2}{m}\upsilon_{o\rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_{o\rho}\left[1 + \frac{C(BL)^2}{m}\right] = \frac{BL}{m}q_o \Rightarrow \upsilon_{o\rho}\frac{m + C(BL)^2}{m} = \frac{BL}{m}q_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_{o\rho} = \frac{BL}{m + C(BL)^2}q_o$$

Β.2.2. Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας

έχουμε:

$$E_{C,\alpha\rho\chi} = E_{C,\tau\varepsilon\lambda} + K_{o\rho} + Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = E_{C,\alpha\rho\chi} - E_{C,\tau\varepsilon\lambda} - K_{o\rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}\frac{{q_o}^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{{q_{o\rho}}^2}{C} - \frac{1}{2}m{\upsilon_{o\rho}}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}\left[\frac{{q_o}^2}{C} - \frac{\left(CB\upsilon_{o\rho}L\right)^2}{C} - m{\upsilon_{o\rho}}^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}\left[\frac{{q_o}^2}{C} - \frac{(CBL)^2 + mC}{C}{\upsilon_{o\rho}}^2\right] \Rightarrow$$

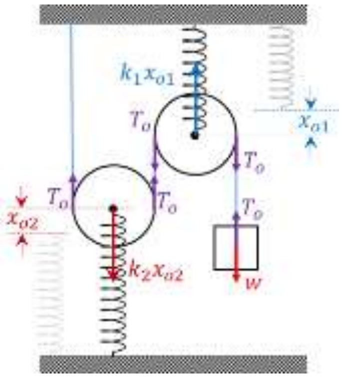
$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2C}\left[{q_o}^2 - C[C(BL)^2 + m]\left(\frac{BL}{m + C(BL)^2}q_o\right)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2C}\left[{q_o}^2 - \frac{C(BL)^2}{m + C(BL)^2}{q_o}^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{{q_o}^2}{2C} \cdot \frac{m}{m + C(BL)^2}$$

3ο ΘΕΜΑ

Γ.1. Δεδομένου ότι το νήμα είναι αβαρές, η τάση σε όλο το μήκος του έχει σταθερή τιμή. Έστω ότι στην κατάσταση ισορροπίας, η τιμή αυτή είναι T_o Έστω επίσης ότι οι επιμηκύνεις των ελατηρίων τότε είναι x_{o1} και x_{o2} αντίστοιχα (βλ. σχ.).



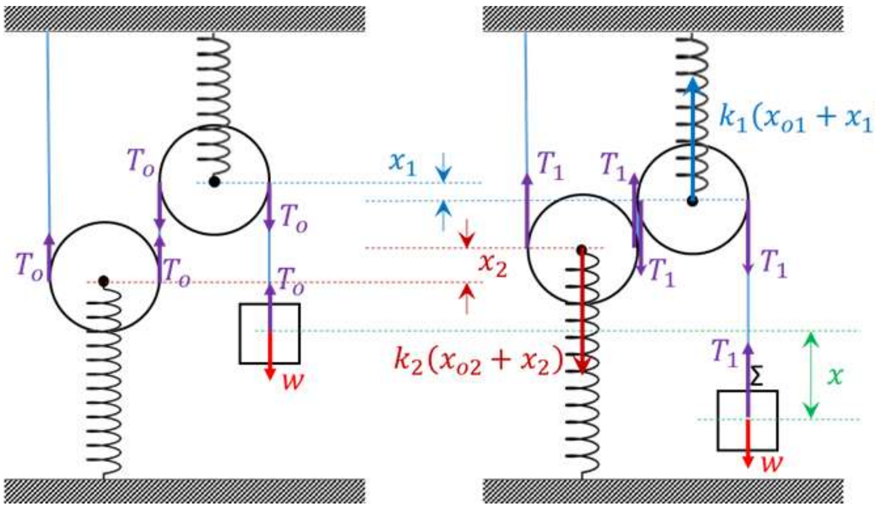
Από τις συνθήκες ισορροπίας προκύπτουν οι σχέσεις:

$T_o = w$ Για το σώμα (1)

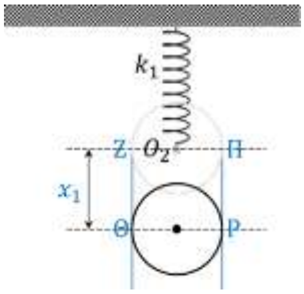
$2T_o = k_1x_{o1}$ Για την πρώτη τροχαλία (2)

$2T_o = k_2x_{o2}$ Για την δεύτερη τροχαλία (3)

Μετατοπίζουμε το σώμα κατά x προς τα κάτω, οπότε τα ελατήρια υφίστανται *πρόσθετες* επιμηκύνσεις x_1 και x_2 αντίστοιχα (βλ. ακόλουθο σχ., όπου, για λόγους ευκρίνειας, οι τάσεις στα άκρα του τμήματος του νήματος που συνδέει τις δύο τροχαλίες έχουν σχεδιαστεί ελαφρώς μετατοπισμένες).



Το κέντρο της πρώτης τροχαλίας κατέρχεται κατά x_1. Από το ακόλουθο σχήμα φαίνεται ότι απελευθερώνονται τα τμήματα $(Z\Theta)$ και (ΠP) του νήματος (εκατέρωθεν της τροχαλίας), καθένα από τα οποία έχει μήκος επίσης x_1.



Δηλαδή το συνολικό μήκος νήματος που ξετυλίγεται είναι ίσο προς $2x_1$.
Αντίστοιχα, το κέντρο της δεύτερης τροχαλίας ανέρχεται κατά x_2, οπότε από αυτήν ξετυλίγεται νήμα συνολικού μήκους $2x_2$.
Πράγματι λοιπόν, αν το σώμα κατέρχεται κατά x, αυτό θα είναι ίσο με το συνολικό μήκος του νήματος που ξετυλίχτηκε, δηλαδή:

$$x = 2x_1 + 2x_2 \Rightarrow x = 2(x_1 + x_2) \quad (4)$$

που είναι το ζητούμενο.
Γ.2. Έστω ότι στην κατάσταση αυτή η τάση του νήματος γίνεται T_1.
Για τις ιδανικές τροχαλίες ισχύει:

$$2T_1 = k_1(x_{o1} + x_1) \quad (5)$$

και

$$2T_1 = k_2(x_{o2} + x_2) \quad (6)$$

Για την δύναμη επαναφοράς στο σώμα ισχύει:

$$\Sigma F = -T_1 + w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F = -\frac{k_1(x_{o1} + x_1)}{2} + w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F = -\frac{k_1 x_{o1}}{2} - \frac{k_1 x_1}{2} + w \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \Sigma F = -\frac{2T_o}{2} - \frac{k_1 x_1}{2} + w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F = -T_o - \frac{k_1 x_1}{2} + w \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \Sigma F = -\frac{k_1 x_1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F = -\frac{k_1 x_1}{2} \quad (7)$$

Εξ άλλου:

$$k_1 x_1 = k_2 x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{k_1 x_1}{k_2} \quad (8)$$

$$(4) \overset{(8)}{\Rightarrow} x = 2\left(x_1 + \frac{k_1 x_1}{k_2}\right) \Rightarrow x = 2\frac{k_2 x_1 + k_1 x_1}{k_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2\frac{k_1 + k_2}{k_2} x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{k_2}{2(k_1+k_2)} x \quad (9)$$

Συνδυάζοντας το αποτέλεσμα αυτό με την (7) προκύπτει:

$$\Sigma F = -\frac{k_1 k_2}{4(k_1 + k_2)} x$$

Δηλαδή ικανοποιείται το κριτήριο, συνεπώς το σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με

$$D = \frac{k_1 k_2}{4(k_1 + k_2)}$$

και

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{k_1 k_2}{4(k_1+k_2)}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{m\frac{4(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{4\frac{w}{g}\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}}$$

που είναι το ζητούμενο.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

4ο ΘΕΜΑ

Δ.1. Για να είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε την Μ.Ε.Τ. θα πρέπει η εξάρτηση από την σταθερά επαναφοράς να είναι γραμμική. Συνεπώς η σχέση που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε είναι

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^2 = \frac{1}{4\pi^2 m} k - \frac{b^2}{16\pi^2 m^2}$$

Δηλαδή

$$X = k,$$

$$Y = f^2,$$

$$\alpha = -\frac{b^2}{16\pi^2 m^2}$$

$$\beta = \frac{1}{4\pi^2 m}$$

Δ.2. Δίνεται ο συμπληρωμένος πίνακας:

α/α	k (N/m)	T (s)	X $(\mathrm{N/m})$	Y $(\mathrm{Hz^2})$	X^2 $((\mathrm{N/m})^2)$	$X \cdot Y$ $(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{Hz^2})$	$Y - a - \beta \cdot X$ $(\mathrm{Hz^2})$
1	50	0,288	50	12,0409	2.500	602,05	0,03314099
2	80	0,226	80	19,5364	6.400	1.562,91	0,00006599
3	110	0,191	110	27,4576	12.100	3.020,34	0,05171379
4	140	0,170	140	34,5744	19.600	4.840,42	0,11659721
5	170	0,154	170	42,1201	28.900	7.160,42	0,23177805
6	200	0,141	200	50,2681	40.000	10.053,62	0,00036494
7	230	0,131	230	58,2169	52.900	13.389,89	0,05954901
8	260	0,123	260	66,0969	67.600	17.185,19	0,19215657
9	290	0,117	290	73,1025	84.100	21.199,73	0,05842534
		$\sum_{i=1}^{9} \ldots$	1530	383,41	314.100	79.014,55	0,74379189

Δ.3. Εφαρμόζοντας του τύπους έχουμε:

$$D = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \Rightarrow D = 9 \cdot 314.100 - (1.530)^2 = 486.000$$

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{D} \Rightarrow \alpha = \frac{314.100 \cdot 383{,}41 - 1.530 \cdot 79.014{,}55}{486.000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \cong -0{,}9506$$

$$\beta = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{D} \Rightarrow \beta = \frac{9 \cdot 79.014{,}55 - 1.530 \cdot 383{,}41}{486.000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta \cong 0{,}256$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - \beta \cdot x_i)^2}{n-2}} \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{\frac{0{,}74379189}{7}} \Rightarrow \sigma_y \cong 0{,}326$$

$$\delta\alpha = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{D}} \Rightarrow \delta\alpha \cong 0{,}326 \sqrt{\frac{314.100}{486.000}} \Rightarrow \delta\alpha \cong 0{,}262$$

$$\delta\beta = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{D}} \Rightarrow \delta\beta \cong 0{,}326 \sqrt{\frac{9}{486.000}} \Rightarrow \delta\beta \cong 0{,}001$$

Καταλήγουμε λοιπόν:

$$m \cong 0{,}099\ kg$$

και

$$b \cong 1{,}21 \frac{N}{m/s}$$

Οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$f^2 = 0{,}256 \cdot k - 0{,}9506\ \ (S.I.)$$

Δ.4. Τα πειραματικά σημεία και η ευθεία της Μ.Ε.Τ. φαίνονται στο επόμενο σχήμα: