Νερό και αντικείμενα (10 μονάδες)

Σε αυτό το πρόβλημα, εξετάζουμε τα φαινόμενα που σχετίζονται με την επιφανειακή τάση κατά την αλληλεπίδραση νερού και αντικειμένων . Το Μέρος A, αναφέρεται σε κίνηση, ενώ τα μέρη B και C περιγράφουν στατικές καταστάσεις.

Εάν είναι απαραίτητο, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το γεγονός πως όταν η συνάρτηση $y(x)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $y''(x) = ay(x)$ (a είναι μια θετική σταθερά), τότε η γενική της λύση είναι $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$, όπου A και B είναι αυθαίρετες σταθερές.

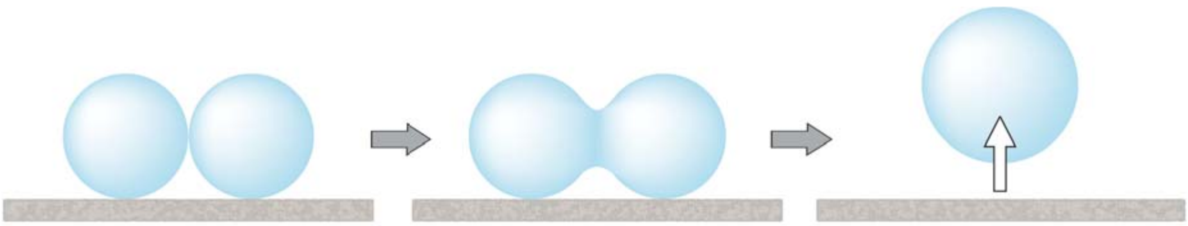
Μέρος A. Συγχώνευση σταγόνων νερού (2,0 μονάδες)

Θεωρούμε δύο ακίνητες σφαιρικές σταγόνες νερού στην επιφάνεια ενός υπερ-υδρόφοβου υλικού, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Αρχικά, οι δύο πανομοιότυπες σφαιρικές σταγόνες τοποθετούνται η μια διπλα στην άλλη πανω στην επιφάνεια. Στη συνέχεια, οι σταγόνες συγχωνεύονται αφού αγγίξουν η μία την άλλη και σχηματίζουν μια μεγαλύτερη σφαιρική σταγόνα νερού, η οποία ξαφνικά κινείται προς τα πάνω, εκτελώντας ένα άλμα.

A.1 Η ακτίνα a και των δύο σταγόνων νερού πριν από τη συγχώνευση είναι $100\ \mu$m. Η πυκνότητα του νερού ρ είναι 1.00×10^3 kg/m^3. Η επιφανειακή τάση γ είναι 7.27×10^{-2} J/m^2.
Ένα μέρος k της διαφοράς της επιφανειακής ενέργειας πριν και μετά τη συγχώνευση, ΔΕ, μετατρέπεται στην αναγκαια κινητική ενέργεια της σταγόνας για το άλμα της. Στη συνέχεια, προσδιορίστε την αρχική ταχύτητα άλματος, v, της συγχωνευμένης σταγόνας νερού με δύο σημαντικά ψηφία υπό τις ακόλουθες παραδοχές:
- $k = 0.06$
- Πριν και μετά τη συγχώνευση, ο συνολικός όγκος νερού διατηρείται.

2.0pt



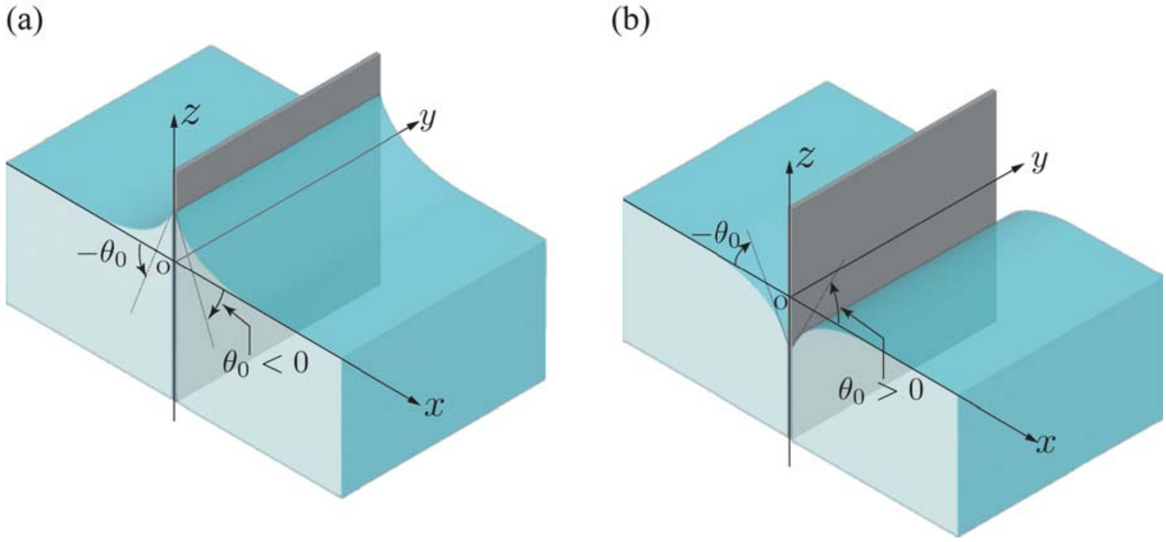
Σχήμα 1: Συγχώνευση δύο σταγόνων νερού και άλμα της συγχωνευμένης σταγόνας νερού.

Μέρος B. Κάθετα τοποθετημένη πλάκα (4,5 μονάδες)

Μια επίπεδη πλάκα βυθίζεται κάθετα στο νερό. Τα σχήματα 2(α) και 2(β) δείχνουν αντίστοιχα τις μορφές της επιφάνειας του νερού για τα υδρόφιλα (που έλκουν τα μόρια του νερού) και υδρόφοβα (που το απωθούν) υλικά της πλάκας. Αδιαφορούμε για το πάχος της πλάκας.

Η επιφάνεια της πλάκας βρίσκεται στο επίπεδο yz και η οριζόντια επιφάνεια του νερού μακριά από την πλάκα βρίσκεται στο επίπεδο xy στην θέση $z = 0$. Το σχήμα της επιφάνειας δεν εξαρτάται από την y-συντεταγμένη. Έστω $\theta(x)$ η γωνία μεταξύ της υδάτινης επιφάνειας και του οριζόντιου επιπέδου σε ένα σημείο (x, z) της υδάτινης επιφάνειας στο επίπεδο xz. Εδώ το $\theta(x)$ μετράται ως προς τον θετικό άξονα x και η αντιωρολογιακή περιστροφή λαμβάνεται ως θετική. Έστω ότι το $\theta(x)$ ισούται με θ_0 στο σημείο επαφής μεταξύ της σανίδας και της επιφάνειας του νερού ($x = 0$). Στην συνέχεια, η τιμή θ_0 θεωρείται σταθερή και ςεξαρτώμενη από τις ιδιότητες του υλικού της πλάκας.

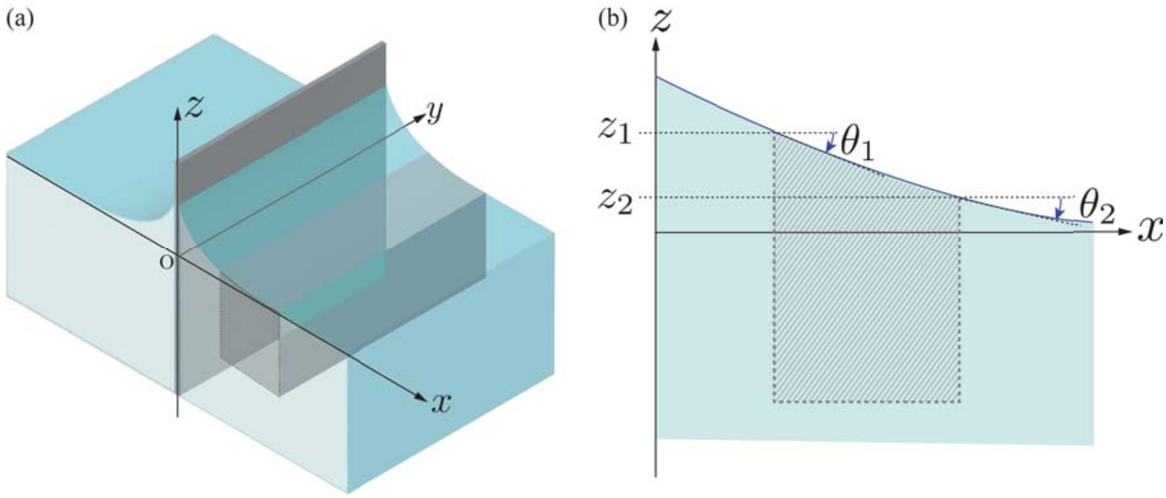
Η πυκνότητα του νερού ρ είναι σταθερή και η επιφανειακή τάση του νερού γ είναι ομοιόμορφη. Η σταθερά της επιτάχυνσης βαρύτητας είναι g. Η ατμοσφαιρική πίεση P_o θεωρείται πάντα σταθερ'η. Ας προσδιορίσουμε τη μορφή της επιφάνειας του νερού με τα ακόλουθα βήματα. Λάβετε υπ΄ όψη σας ότι η μονάδα επιφανειακής τάσης είναι J/m^2 αλλά και N/m.



Σχ. 2: Πλάκες κάθετα βυθισμένες στο νερό. (α) περίπτωση υδρόφιλης πλάκας-(β) περίπτωση υδρόφοβης πλάκας.

B.1	Θεωρούμε μια περίπτωση υδρόφιλης πλάκας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2(α). Σημειώνουμε ότι η πίεση του νερού, P, ικανοποιεί τις συνθήκες $P < P_0$ για το $z > 0$ και $P = P_0$ για το $z = 0$. Στη συνέχεια, εκφράζουμε το P στο z ως προς το ρ, το g, το z και το P_0.	0.6pt

B.2	Θεωρούμε ένα τμήμα (μπλοκ) του νερού του οποίου το περίγραμμα φαίνεται σκιασμένο στο Σχήμα 3(α). Η επίπεδη διατομή του xz παρουσιάζεται με διαγράμμιση στο Σχ.3(β). Έστω z_1 και z_2 αντίστοιχα οι συντεταγμένες της αριστερής και της δεξιάς ακμής του ορίου (υδάτινη επιφάνεια) μεταξύ του υδάτινου όγκου και του αέρα. Να βρεθεί η οριζόντια συνιστώσα (x συνιστώσα) της συνολικής δύναμης f_x ανά μονάδα μήκους κατά μήκος του άξονα y, η οποία ασκείται στο μπλοκ νερού λόγω της πίεσης, συναρτήσει των ρ, g, z_1 και z_2. Σημειώστε ότι η ατμοσφαιρική πίεση P_0 δεν ασκεί καθαρή οριζόντια δύναμη στο μπλοκ νερού.	0.8pt



Σχ. 3: Περίγραμμα του υδάτινου τμήματος (όγκου) στην επιφάνεια του νερού. (α) Άποψη από ψηλά και πλάγια και (β) εγκάρσια τομή.

B.3	Η επιφανειακή τάση που ασκείται στο μπλοκ νερού εξισορροπείται με τη δύναμη f_x που συζητήθηκε στο σημείο B.2. Ορίζουμε αντίστοιχα θ_1 και θ_2 ως τις γωνίες μεταξύ της επιφάνειας του νερού και του οριζόντιου επιπέδου στα αριστερά και δεξιά άκρα. Εκφράζουμε το f_x ως προς τα γ, θ_1 και θ_2.	0.8pt

B.4 Η ακόλουθη εξίσωση ισχύει σε ένα αυθαίρετο σημείο (x, z) στην επιφάνεια του νερού,

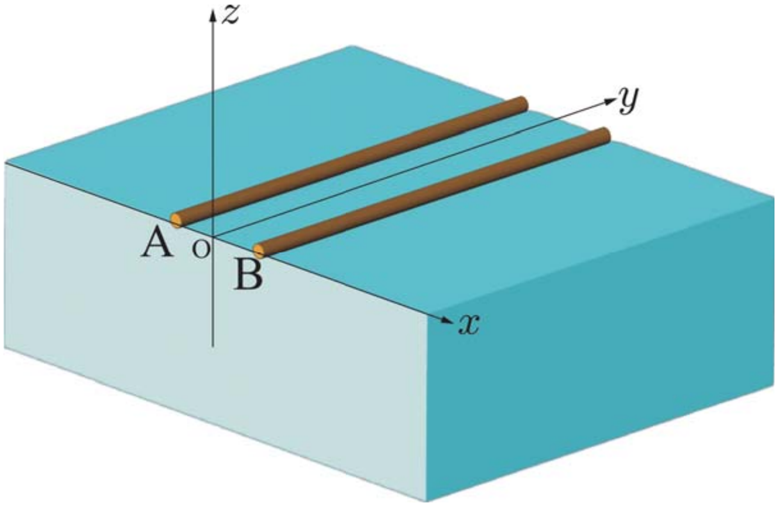
$$\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^a + \cos\theta(x) = \text{constant}. \quad (1)$$

Προσδιορίστε τον εκθέτη a και εκφράστε τη σταθερά ℓ ως προς τα γ και ρ. Σημειώστε ότι η εξίσωση αυτή ισχύει ανεξάρτητα από τα υδρόφιλα ή υδρόφοβα υλικά της πλάκας. **0.8pt**

B.5	Στην εξίσωση (1) στο B.4, υποθέτουμε ότι η μεταβολή της υδάτινης επιφάνειας είναι αργή, δηλαδή $\lvert z'(x)\rvert \ll 1$, έτσι ώστε να μπορούμε να αναπτύξουμε το $\cos\theta(x)$ σε σχέση με το $z'(x)$ μέχρι τη δεύτερη τάξη. Στη συνέχεια, διαφοροποιώντας την προκύπτουσα εξίσωση ως προς x, λαμβάνουμε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από το $z(x)$. Λύστε αυτή τη διαφορική εξίσωση και προσδιορίστε το $z(x)$ για $x \geq 0$ ως προς το $\tan\theta_0$ και το ℓ. Σημειώστε ότι οι κατακόρυφες διευθύνσεις των Σχημάτων 2 και 3 είναι σχεδιασμένες έτσι ωστε να διευκολυνεται η προβολή και δεν ικανοποιούν τη συνθήκη, $\lvert z'(x)\rvert \ll 1$.	1.5pt

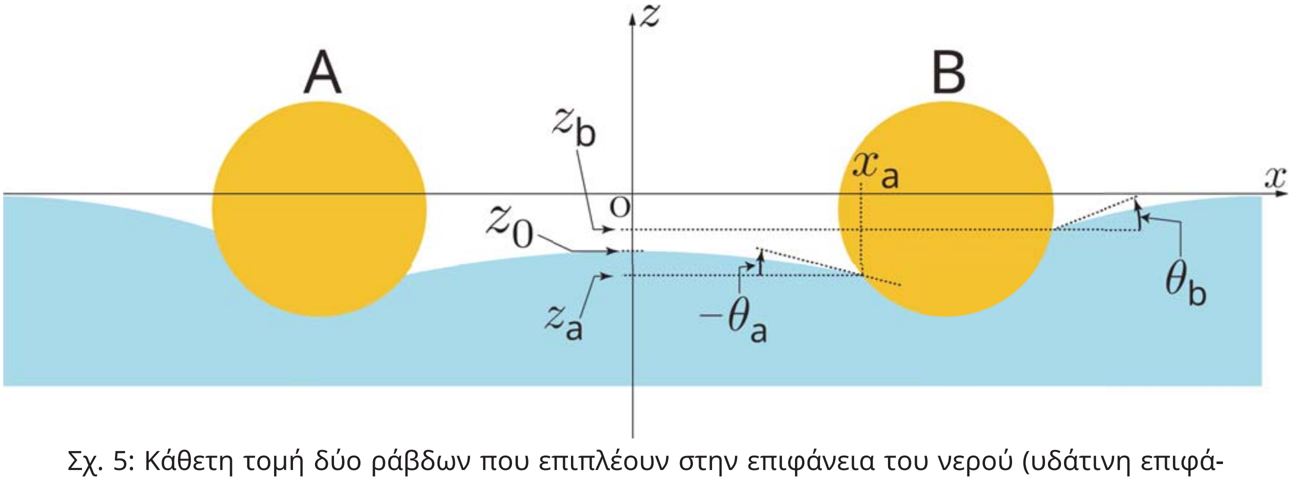
Μέρος Γ. Αλληλεπίδραση μεταξύ δύο ράβδων (3,5 μονάδες)

Οι πανομοιότυπες ράβδοι A και B από το ίδιο υλικό που επιπλέουν παράλληλα στην επιφάνεια του νερού τοποθετούνται στην ίδια απόσταση από τον άξονα y (Σχήμα 4).



Σχ. 4: Δύο ράβδοι A και B επιπλέουν στην επιφάνεια του νερού.

C.1	Στα σημεία επαφής της ράβδου B με την υδάτινη επιφάνεια ορίζουμε τις z-συντεταγμένες z_a και z_b και τις γωνίες θ_a και θ_b, όπως φαίνονται στο σχήμα 5. Προσδιορίστε τη συνιστώσα της οριζόντιας δύναμης, F_x, που ασκείται στη ράβδο B ανά μονάδα μήκους κατά μήκος του y-άξονα σε όρους θ_a, θ_b, z_a, z_b, ρ, g και γ.	1.0pt



Σχ. 5: Κάθετη τομή δύο ράβδων που επιπλέουν στην επιφάνεια του νερού (υδάτινη επιφάνεια).

C.2	Ορίζουμε τη συντεταγμένη z της υδάτινης επιφάνειας, z_0, στο μέσο δύο ράβδων στο επίπεδο xz. Να εκφράσετε τη δύναμη F_x που υπολογίσατε στο ερώτημα C.1 χωρίς να χρησιμοποιήσετε τις θ_a, θ_b, z_a και z_b.	1.5pt

C.3	Έστω x_{a} η x-συντεταγμένη του σημείου επαφής μεταξύ της επιφάνειας του νερού και του αριστερού άκρου της ράβδου B. Χρησιμοποιώντας τη διαφορική εξίσωση που προέκυψε στο ερώτημα B.4, εκφράστε τη συντεταγμένη z_0 της στάθμης του νερού στο μέσο των δύο αυτών ράβδων A και B ως προς τις x_{a} και z_{a}. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σταθερά ℓ που χρησιμοποιήθηκε στο ερώτημα B.4.	1.0pt

Νερό και αντικείμενα (10 μονάδες)

Μέρος A. Συγχώνευση σταγόνων νερού (2,0 μονάδες)

A.1 (2.0pt)

$v =$

Μέρος B. Κάθετα τοποθετημένος πίνακας (4,5 μονάδες)

B.1 (0.6pt)

$P =$

B.2 (0.8pt)

$f_x =$

B.3 (0.8pt)

$f_x =$

B.4 (0.8pt)

$a =$

$\ell =$

B.5 (1.5pt)

$z(x) =$

Μέρος Γ. Αλληλεπίδραση μεταξύ δύο ράβδων που επιπλέουν στην επιφάνεια του νερού (3,5 μονάδες)

C.1 (1.0pt)

$F_x =$

C.2 (1.5pt)

$F_x =$

C.3 (1.0pt)

$z_0 =$

Solution / marking scheme – Water and Objects (10 pt)

General rules

- In the following, “coefficients” refer to the numerical factors and do not include parameters.

General rules for carryover points

- No points inside a single question.
- Only wrong answers on the answer sheet are considered.
- Answers with wrong dimensions are not considered.

Part A. Merger of water drops and jump of the merged water drop (1.0 pt)

A.1 (total 2.0 pt)

(2.0 pt)

$v = 0.23$ m/s

- No deduction if the answer falls within the range $0.22\ \text{m/s} \le v \le 0.24\ \text{m/s}$

partial points

The surface energy per drop before the merger:

$$(0.4\ \text{pt})\quad E = 4\pi a^2\gamma \tag{A.1.1}$$

The surface energy difference:

$$(0.6\ \text{pt})\quad \Delta E = 4\pi\left(2 - 2^{2/3}\right)a^2\gamma \tag{A.1.2}$$

The transfer of surface energy to kinetic energy :

$$(0.4\ \text{pt})\quad Mv^2/2 = 0.06\Delta E \tag{A.1.3}$$

where $M = 4\pi a^3\rho/3 \times 2 = 8\pi a^3\rho/3$ is the mass of the drop after the merger.

- No partial point will be given if the factor 0.06 is missing.

Numerical evaluation:

$$v = \sqrt{3\left(2 - 2^{2/3}\right) \times \frac{0.06 \times (7.27 \times 10^{-2})}{(1.0 \times 10^3) \times (100 \times 10^{-6})}} = 0.23\cancel{2}\ \text{m/s}$$

Part B. A vertically placed board and water surface form around it (4.2 pt)

B.1 (total 0.6 pt)
Usable letters: ρ, g, z, P_0

(0.6 pt)

$$P = P_0 - \rho g z$$

- No point will be given for $P = P_0 + \rho g z$

Commentary

The expression, $P = P_0 - \rho g z$, holds for both $z < 0$ and $z > 0$, as long as z is inside the water.

B.2 (total 0.8 pt)
Usable letters: ρ, g, z_1, z_2

(0.8 pt)

$$f_x = \frac{1}{2}\rho g\left(z_2^2 - z_1^2\right)$$

- Give 0.6 pt for $f_x = \rho g\left(z_2^2 - z_1^2\right)$
- Give 0.4 pt for $f_x = \frac{1}{2}\rho g\left(z_1^2 - z_2^2\right)$

Commentary

Because the atmospheric pressure P_0 exerts no net horizontal force on the water block, we have

$$f_x = \int_{z_2}^{z_1}(-\rho g z)dz = \frac{1}{2}\rho g\left(z_2^2 - z_1^2\right)$$

B.3 (total 0.8 pt)
Usable letters: $\gamma, \theta_1, \theta_2$

(0.8 pt)

$$f_x = \gamma\cos\theta_1 - \gamma\cos\theta_2$$

- Give 0.6 pt for $f_x = \gamma\cos\theta_2 - \gamma\cos\theta_1$
- Give 0.4 pt for $f_x = \gamma\cos\theta_2 + \gamma\cos\theta_1$ or $f_x = -\gamma\cos\theta_2 - \gamma\cos\theta_1$.

B.4 (total 0.8 pt)

(0.4 pt)

$a = 2$

- No point will be given for $a \neq 2$. Error propagation is not considerd for this answer, since $a \neq 2$ means dimensional error.

Usable letters: γ, ρ

(0.4 pt)

$$\ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$$

- If an unnecessary coefficient is included as a factor, 0.2 pt will be deducted.

B.5 (total 1.5 pt)
Usable letters: $\tan\theta_0, \ell$

(1.5 pt)

$$z(x) = -\ell \tan\theta_0 e^{-x/\ell}$$

- Deduct 0.2 pt for $z(x) = -\ell \sin\theta_0 e^{-x/\ell}$ or $z(x) = -\ell\theta_0 e^{-x/\ell}$.

partial points

$z' = \tan\theta$ leads to

$$(0.2 \text{ pt}) \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+(z')^2}} \tag{B.5.1}$$

$$(0.1 \text{ pt}) \quad \cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2}(z')^2 \tag{B.5.2}$$

Plug this into Eq.(1) to obtain,

$$(0.2 \text{ pt}) \quad \frac{z^2}{\ell^2} - z'^2 = \text{const.} \tag{B.5.3}$$

Take the derivative of both sides with respect to x :

$$(0.5 \text{ pt}) \quad z'' = \frac{z}{\ell^2} \tag{B.5.4}$$

which is the differential equation which determines the water surface form.
General solution:

$$(0.2 \text{ pt}) \quad z = Ae^{x/\ell} + Be^{-x/\ell} \tag{B.5.5}$$

The boundary condition, $z(\infty) = 0$, leads to

$$(0.1 \text{ pt}) \quad A = 0 \tag{B.5.6}$$

The boundary condition, $z'(0) = \tan\theta_0$, leads to

$$(0.2 \text{ pt}) \quad B = -\ell \tan\theta_0 \tag{B.5.7}$$

Part C. Interaction between two rods floating on the water surface (2.1 pt)

C.1 (total 1.0 pt)
Usable letters: $\theta_\mathrm{a}, \theta_\mathrm{b}, z_\mathrm{a}, z_\mathrm{b}, \rho, g, \gamma$

(1.0 pt)

$$F_x = \frac{1}{2}\rho g\left(z_\mathrm{b}^2 - z_\mathrm{a}^2\right) + \gamma\left(\cos\theta_\mathrm{b} - \cos\theta_\mathrm{a}\right)$$

- Give 0.8 pt for $F_x = \frac{1}{2}\rho g\left(z_\mathrm{b}^2 - z_\mathrm{a}^2\right) + \gamma\left(\cos\theta_\mathrm{a} - \cos\theta_\mathrm{b}\right)$
- Give 0.6 pt for $F_x = \frac{1}{2}\rho g\left(z_\mathrm{b}^2 - z_\mathrm{a}^2\right) + \gamma\cos\theta_2 + \gamma\cos\theta_1$ or $F_x = \frac{1}{2}\rho g\left(z_\mathrm{b}^2 - z_\mathrm{a}^2\right) - \gamma\cos\theta_2 - \gamma\cos\theta_1$.

partial points

The holizontal component of the force due to the pressure is

$$\text{(0.6 pt)} \quad \int_{z_\mathrm{a}}^{z_\mathrm{b}} (\rho g z)\, dz = \frac{1}{2}\rho g\left(z_\mathrm{b}^2 - z_\mathrm{a}^2\right) \tag{C.1.1}$$

Commentary

Comment 1: How to apply the experience in B.1 is as follows. Let z_bottom the z-coordinate at the bottom of the rod, then from the discussion in B1, we see

$$F_x = \int_{z_\mathrm{bottom}}^{z_\mathrm{a}} (-\rho g z)dz + \left(-\int_{z_\mathrm{bottom}}^{z_\mathrm{b}} (-\rho g z)dz\right) = \int_{z_\mathrm{a}}^{z_\mathrm{b}} (\rho g z)dz$$

Comment 2: The fact that the contribution due to the pressure does not depend on the shape of the cross-section can be demonstrated as follows. The pressure at the point s on the contour C along the cross-sectional boundary is

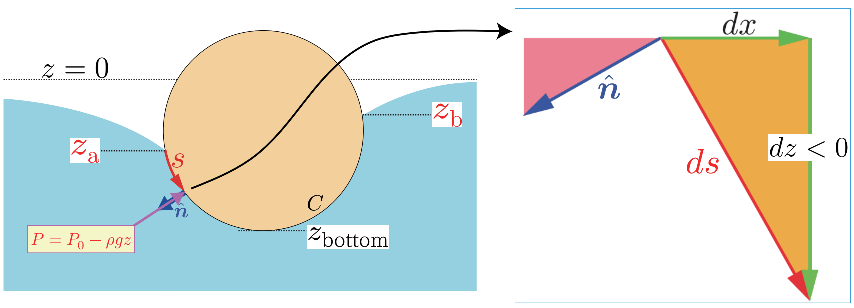
$$-P\hat{n}ds = (-P_0 + \rho g)\hat{n}ds.$$

Let $\hat{x}$ the unit vector pointing the positive x-direction and noting $\hat{x}\cdot\hat{n}ds = dz$ (see the figure shown below), the holizontal component becoms and its holizontal component becomes

$$-P\hat{n}\cdot\hat{x}ds = -P_0 dz + \rho g dz.$$

Integrating along the contour C, we obtain

$$\oint_C (-P\hat{n}\cdot\hat{x}ds) = \int_{z_\mathrm{a}}^{z_\mathrm{b}} (\rho g z)dz = \frac{1}{2}\rho g\left(z_\mathrm{b}^2 - z_\mathrm{a}^2\right)$$



C.2 (total 1.5 pt)
Unusable letters: $\theta_{\rm a}, \theta_{\rm b}, z_{\rm a}, z_{\rm b}$

(1.5 pt)

$$F_x = -\frac{1}{2}\rho g z_0^2$$

- Give 1.3 pt for $F_x = -\rho g z_0^2$.
- Give 0.8 pt for $F_x = \dfrac{1}{2}\rho g z_0^2$.

partial points

Apply the boundary conditions to Eq. (1) to obtain

$$\text{(0.6 pt)} \quad \underbrace{\frac{1}{2}\rho g z_{\rm a}^2 + \gamma\cos\theta_{\rm a}}_{x=x_{\rm a}} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho g z_0^2 + \gamma}_{x=0} \tag{C.2.1}$$

- Give 0.4 pt for $\rho g z_{\rm a}^2 + \gamma\cos\theta_{\rm a} = \rho g z_0^2 + \gamma$

$$\text{(0.6 pt)} \quad \underbrace{\frac{1}{2}\rho g z_{\rm b}^2 + \gamma\cos\theta_{\rm b}}_{x=x_{\rm b}} = \underbrace{\gamma}_{x\to\infty} \tag{C.2.2}$$

- Give 0.4 pt for $\rho g z_{\rm b}^2 + \gamma\cos\theta_{\rm b} = \rho g z_0^2$

F_x is obtained by subtracting (C2.1) from (C2.2).

C.3 (total 1.0 pt)
Usable letters: $x_{\mathrm{a}}, z_{\mathrm{a}}$

(1.0 pt)

$$z_0 = \frac{2z_{\mathrm{a}}}{e^{x_{\mathrm{a}}/\ell} + e^{-x_{\mathrm{a}}/\ell}}$$

- Correct alternative answer: $z_0 = \dfrac{z_{\mathrm{a}}}{\tanh(x_{\mathrm{a}}/\ell)} = z_{\mathrm{a}} \coth(x_{\mathrm{a}}/\ell)$

partial points

General solution: $z(x) = Ae^{x/\ell} + Be^{-x/\ell}$
Taking into account the left-right symmetry, we obtain,

$$(0.3\ \text{pt}) \quad A = B \tag{C.3.1}$$

Boundary condition, $z(0) = z_0$ leads to

$$(0.3\ \text{pt}) \quad A + B = z_0 \tag{C.3.2}$$

Find the coefficients:

$$(0.2\ \text{pt}) \quad A = z_0/2 \tag{C.3.3}$$

$$(0.2\ \text{pt}) \quad B = z_0/2 \tag{C.3.4}$$